

Relativité restreinte



Salvador Dalí

Les montres molles - 1931

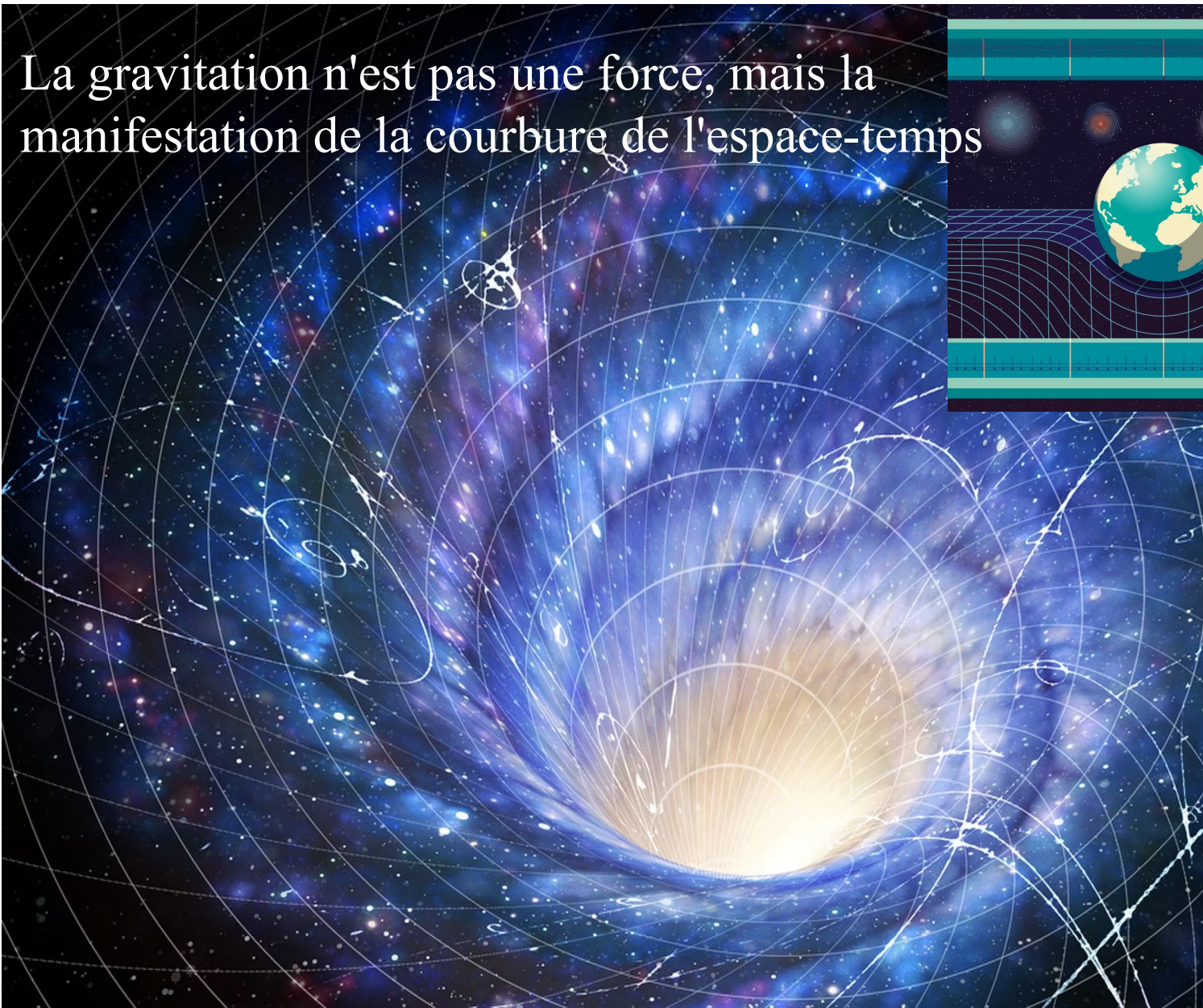
« inutilité de mesurer le temps »

Jean-Philippe Colombier

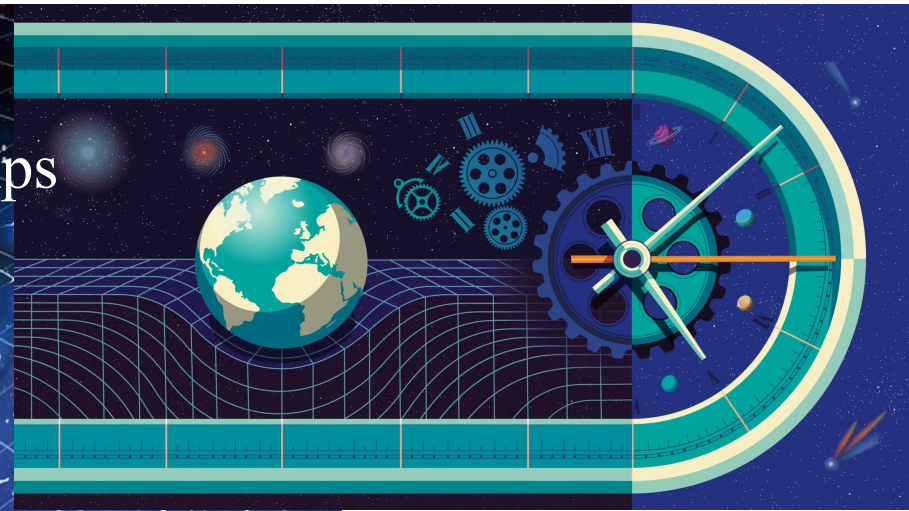
Laboratoire Hubert Curien

Jean.philippe.colombier@univ-st-etienne.fr

Relativité restreinte vs générale

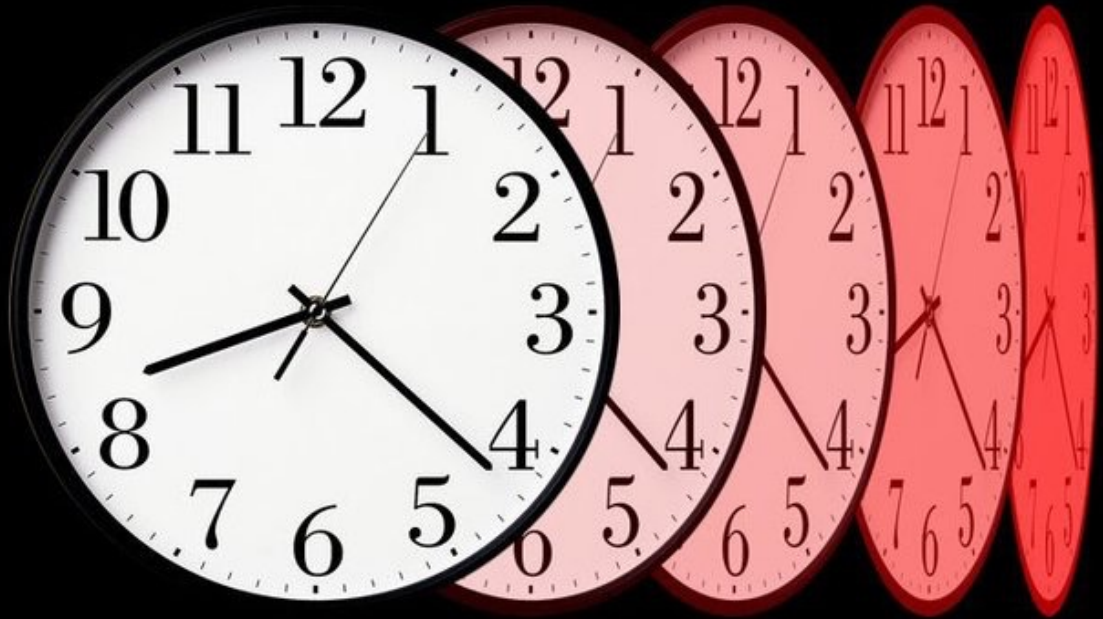
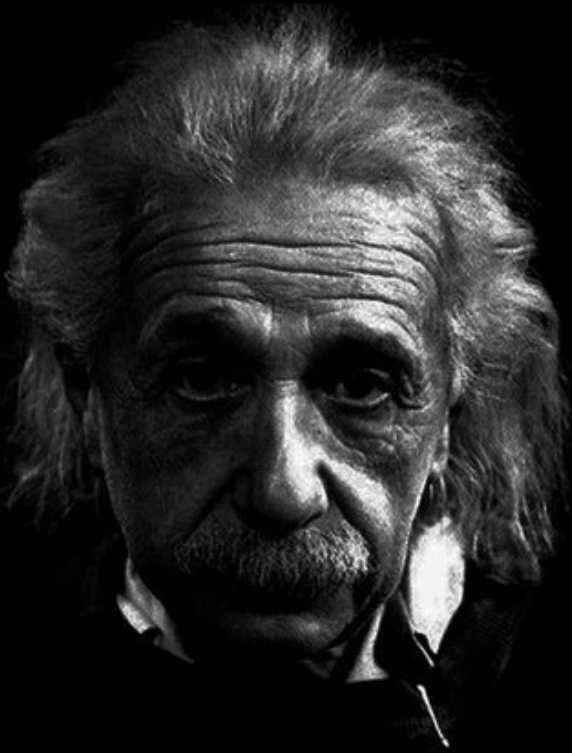


La gravitation n'est pas une force, mais la manifestation de la courbure de l'espace-temps



Relativité
générale

Relativité restreinte vs générale



1905 - Mesure des phénomènes en fonction du référentiel

Relativité restreinte

Relativité restreinte

Special principle of relativity:

If a system of coordinates K is chosen so that, in relation to it, physical laws hold good in their simplest form, the same laws hold good in relation to any other system of coordinates K' moving in uniform translation relatively to K .

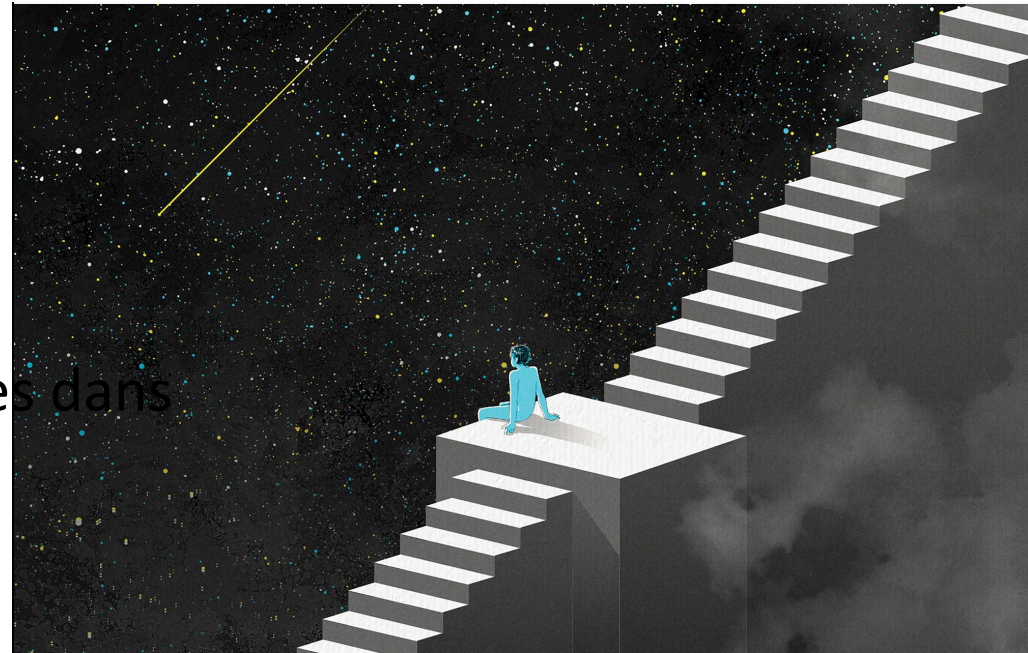
—*Albert Einstein: The Foundation of the General Theory of Relativity, Part A, §1*

Observateur

Toute loi de la nature devrait demeurer :

- inchangée à travers le temps
- indépendante de l'endroit où elles sont évaluées
- indépendamment de la personne qui les mesure.

Les lois de la nature sont les mêmes dans tous les référentiels inertiels.



Plan

I Les Principes de la relativité Restreinte

II Dynamique Relativiste

III Les Particules Chargées

IV Les Accélérateurs de Particules

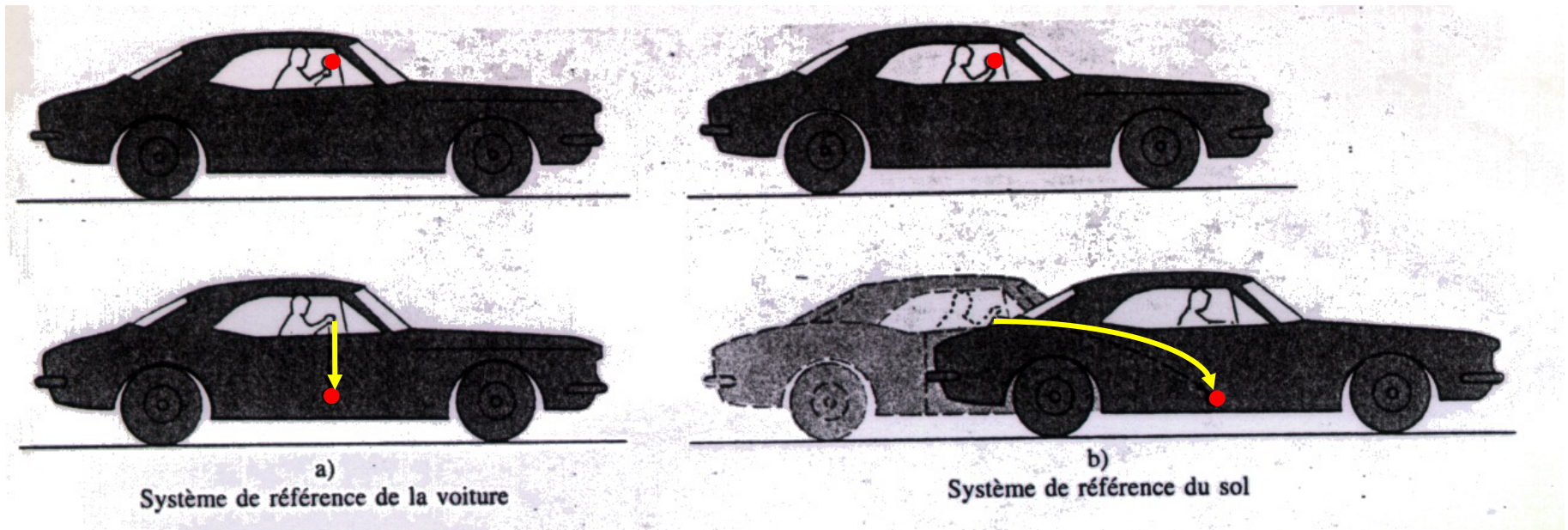
V Collision de particules

I.1 Introduction

Dans la vie courante nous considérons que les lois fondamentales de la physique sont identiques dans tout changement de référentiel galiléen. Si on veut décrire le mouvement d'une pièce de monnaie lâchée sans vitesse initiale par un automobiliste, lui-même en mouvement uniforme par rapport au trottoir, on utilisera la Relation Fondamentale de la Dynamique.

Deux cas sont possibles :

- ✓ mouvement observé par un observateur lié au référentiel de la voiture
- ou
- ✓ mouvement observé par un observateur lié au référentiel du trottoir



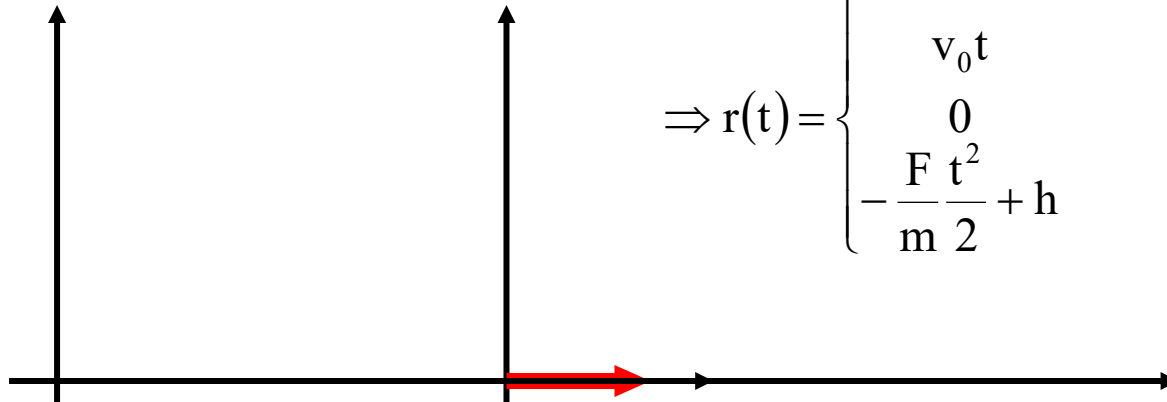
Observateur de la voiture

$$RFD \Leftrightarrow m \frac{d^2 z'}{dt^2} = -F$$

$$\Rightarrow \frac{dz'}{dt} = -\frac{F}{m}t + A \quad v'(t=0) = 0$$

$$\Rightarrow z'(t) = -\frac{F}{m} \frac{t^2}{2} + B \quad z'(t=0) = h$$

$$\Rightarrow z'(t) = -\frac{F}{m} \frac{t^2}{2} + h$$



Piéton

$$RFD \Leftrightarrow m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -\vec{F}$$

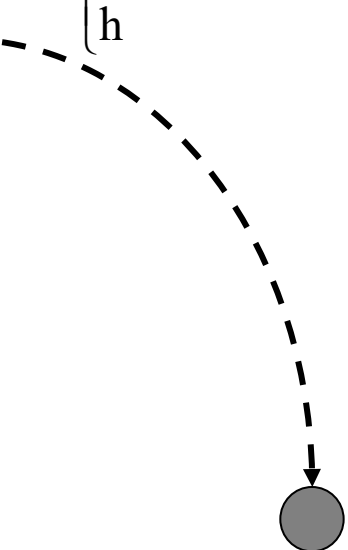
$$\Rightarrow \frac{d\vec{r}}{dt} = \begin{cases} A_x \\ A_y \\ -\frac{F}{m}t + A_z \end{cases}$$

$$\Rightarrow \vec{r}(t) = \begin{cases} v_0 t + B_x \\ B_y \\ -\frac{F}{m}t + A_z \end{cases}$$

$$\Rightarrow r(t) = \begin{cases} v_0 t \\ 0 \\ -\frac{F}{m} \frac{t^2}{2} + h \end{cases}$$

$$v(t=0) = \begin{cases} v_0 \\ 0 \\ 0 \end{cases}$$

$$\vec{r}(t=0) = \begin{cases} 0 \\ 0 \\ h \end{cases}$$



Pour exprimer la position de la pièce de monnaie dans un autre référentiel on peut aussi utiliser la transformée de Galilée.

$$\text{Transformation de Galilée : } \mathbf{r}' = \begin{cases} x' = x - v_0 t \\ y' = y \\ z' = z \end{cases}$$

$$\mathbf{v}' = \frac{d\mathbf{r}'}{dt} = \begin{cases} \frac{dx'}{dt} = v_x - v_0 \\ \frac{dy'}{dt} = v_y \\ \frac{dz'}{dt} = v_z \end{cases}$$

Transformation
des vitesses

$$\boldsymbol{\gamma}' = \frac{d\mathbf{v}'}{dt} = \begin{cases} \frac{d^2 x'}{dt^2} = \gamma_x \\ \frac{d^2 y'}{dt^2} = \gamma_y \\ \frac{d^2 z'}{dt^2} = \gamma_z \end{cases}$$

Transformation
des accélérations

Définitions

Une **grandeur physique** est dite **invariante** dans un changement de référentiel si elle conserve même valeur dans ce changement : par exemple la masse.

Une **loi physique** est dite **covariante** ou **invariante de forme**, si dans un changement de référentiel elle conserve même expression, c'est-à-dire :

$$L[\vec{r}, a, b, \dots, A, B, \dots] = L_i$$

$$L'[\vec{r}', a', b', \dots, A', B', \dots] = L'_i$$

L_i et L'_i sont des constantes

Si de plus on a L_i est égale à L'_i la loi covariante est dite invariante dans le changement de référentiel

Exemple 1 : la relation fondamentale de la dynamique

Soit deux référentiels R et R' . R' est en mouvement de translation uniforme par rapport à R . En appliquant le principe d'invariance de forme (covariance) à la relation fondamentale de la dynamique dans tout changement de référentiel galiléen, on a donc :

$$\text{Dans } R \quad \vec{f} = m\vec{\gamma} \Leftrightarrow \vec{f} - m\vec{\gamma} = 0$$

$$\text{Dans } R' \quad \vec{f}' = m\vec{\gamma}' \Leftrightarrow \vec{f}' - m\vec{\gamma}' = 0$$

On a vu précédemment que la transformée de Galilée pour les accélérations était : $\vec{\gamma} = \vec{\gamma}'$

On sait aussi que la masse est un invariant par changement de référentiel galiléen : $m = m'$



$$\vec{f} = \vec{f}'$$

La force qui s'exerce sur un corps de masse m est invariante par une transformation de Galilée

Exemple 2 : les lois de l'électromagnétisme

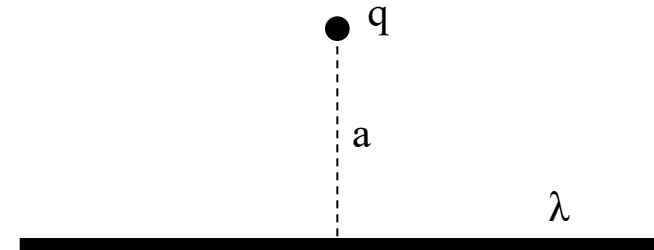
Comme précédemment nous allons essayer de voir si les lois de l'électromagnétisme sont invariantes ou covariantes dans tout changement de référentiel galiléen.

Soit deux référentiels R et R' . R' est en mouvement de translation uniforme par rapport à R . Considérons dans le repère R une charge q au repos et un fil également au repos portant une densité de charge λ (par exemple de même signe que q).

Dans le repère R les différents éléments sont au repos donc la force répulsive (charge de même signe) est de nature électrique.

La force agissant sur q a pour intensité :

$$\Rightarrow f_e = \frac{\lambda q}{2\pi\epsilon_0 a}$$



Dans le repère R' où ces diverses charges sont animées de la même vitesse v uniforme, parallèlement à la direction du fil, l'application du théorème de Gauss conduit à la détermination d'un champ électrique identique à celui observé dans R. On a donc :

$$\Rightarrow f'_e = f_e = \frac{\lambda q}{2\pi\epsilon_0 a}$$

Dans R' le fil est le siège d'un courant qui crée donc un champ magnétique B' (déterminable à l'aide du théorème d'ampère) agissant sur la charge q . La force magnétique s'exerçant sur q a pour module :

$$\Rightarrow f'_m = \frac{\mu_0 \lambda q v^2}{2\pi a}$$

La force magnétique f'_m est de sens opposée à f'_e

Finalement dans R' la force résultante a pour intensité :

$$\begin{aligned} \Rightarrow f' &= f'_e - f'_m = \frac{\lambda q}{2\pi\epsilon_0 a} (1 - \mu_0\epsilon_0 v^2) \\ &= \frac{\lambda q}{2\pi\epsilon_0 a} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \end{aligned}$$

$c = \text{Vitesse de lumière dans le vide}$
 $\Rightarrow \epsilon_0\mu_0 c^2 = 1$

Il y a donc un facteur $\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)$ entre la force f (calculée dans R) et la force f' calculée dans R'.

On a donc perdu l'invariance galiléenne de la force.

Les remèdes :

- ❖ Renoncer à une description invariante pour une classe de repères (ici Galiléens) et spécialiser un repère "**absolu**".
- ❖ Si on reste "**relativiste**" : quelles conditions faut-il imposer pour que les lois de l'électromagnétisme soient covariantes.

Dans le cas relativiste, il faut imposer l'invariance de la vitesse c de la lumière dans le vide. En effet, la théorie de Maxwell prévoit l'existence des ondes électromagnétiques dans le vide. Or le vide est le vide quel que soit le repère choisi pour le décrire.

Exemple 3 : les équations de Maxwell

Comme précédemment nous allons essayer de voir si l'équation de propagation d'une onde électromagnétique est invariante ou covariante dans tout changement de référentiel galiléen.

Soit deux référentiels R et R'. R' est mouvement de translation uniforme par rapport à R.

Dans le référentiel R l'équation d'onde s'écrit :

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}$$

Afin de vérifier l'invariance de l'équation d'onde il faut réécrire cette équation dans le référentiel mobil R'. La transformation de Galilée va nous permettre de redéfinir les opérateurs de dérivées partielles.

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \phi}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial y'} \frac{\partial y'}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial z'} \frac{\partial z'}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial x}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \phi}{\partial x'}$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x'^2} \frac{\partial x'}{\partial x} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x' \partial y'} \frac{\partial y'}{\partial x} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x' \partial z'} \frac{\partial z'}{\partial x} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x' \partial t'} \frac{\partial t'}{\partial x}$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x'^2}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x' = x \\ y' = y \\ z' = z - vt \\ t' = t \end{array} \right.$$

On effectue le même calcul pour les autres opérateurs :

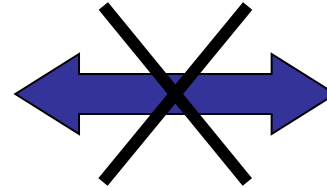
$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y'^2}$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial z'^2}$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial t'^2} - 2v \frac{\partial^2 \phi}{\partial t' \partial z}$$

Donc en identifiant dans l'équation d'onde :

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z'^2} = \frac{1}{c^2} \left[v^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial t'^2} - 2v \frac{\partial^2 \phi}{\partial t' \partial z} \right]$$



$$\frac{\partial^2 \phi'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 \phi'}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 \phi'}{\partial z'^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi'}{\partial t'^2}$$

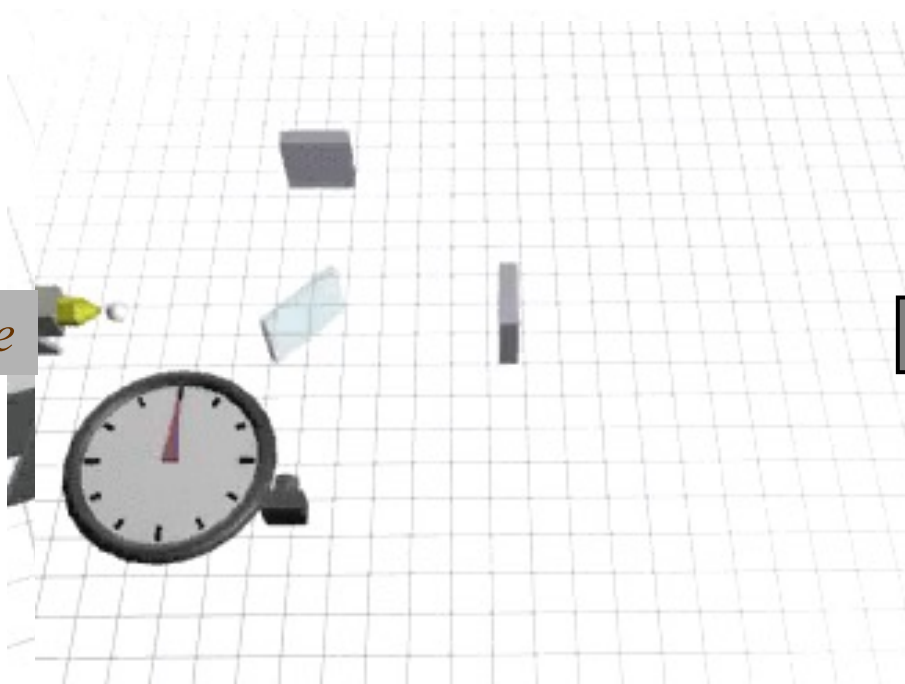


Donc les équations de Maxwell ne sont pas invariantes par changement de référentiel galiléen.

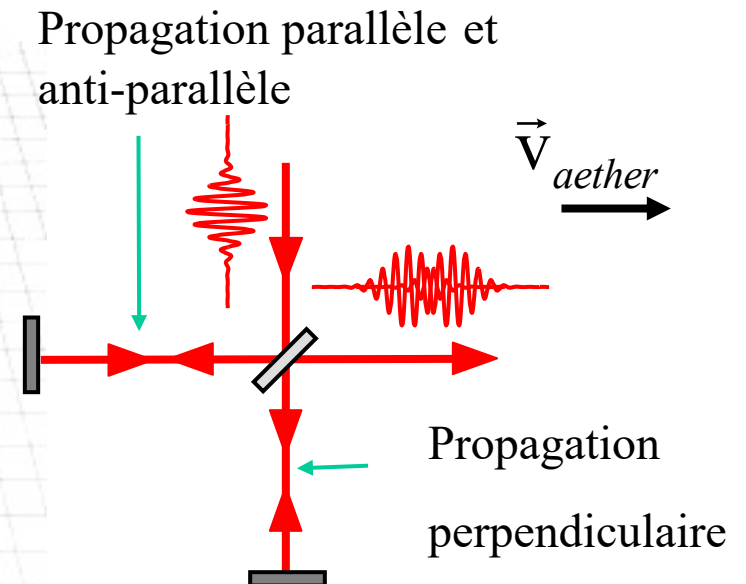
Pour résoudre ces problèmes les scientifiques pensaient, à la fin du XIX^e siècle, que les ondes électromagnétiques avaient besoin d'un support pour se propager et ils donnèrent le nom d'**éther** à ce milieu. Son référentiel associé était celui, bien-entendu, où les équations de Maxwell étaient les plus simples.

I.2.1 l'expérience de Michelson-Morley

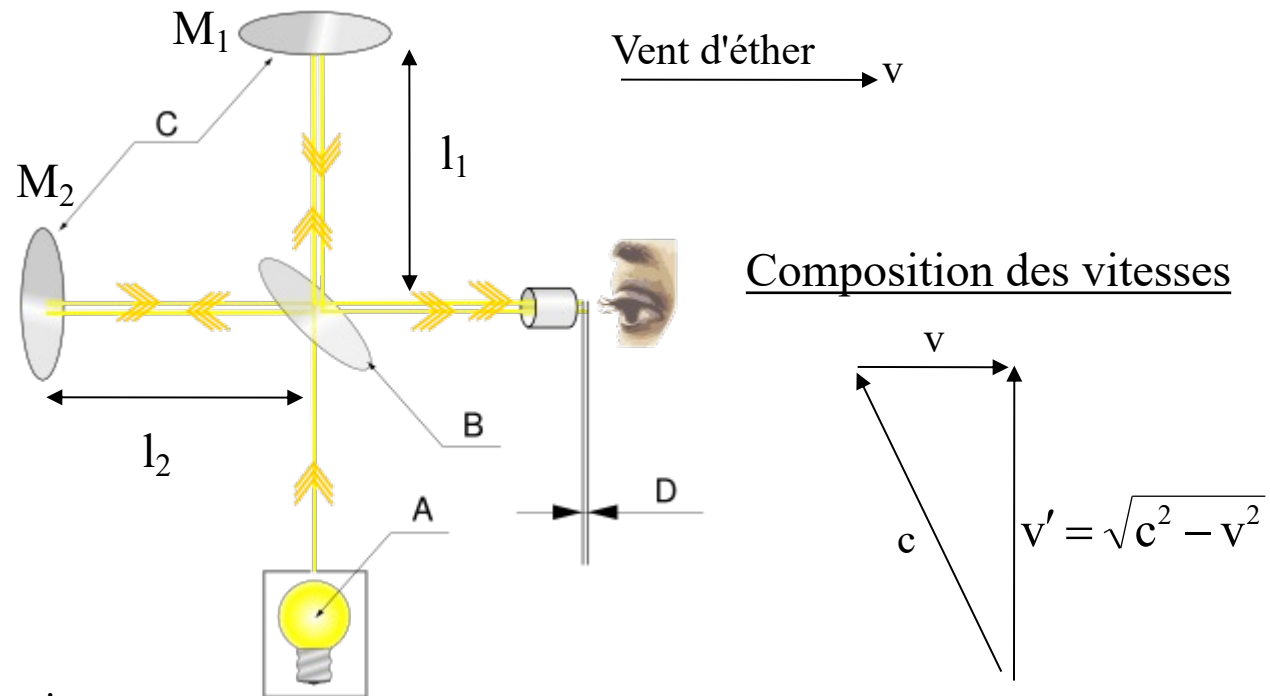
Les expériences **de Michelson-Morley** (1881-1887) sont une série d'expériences tendant à démontrer l'existence de l'éther
(éther= support matériel des vibrations d'une onde EM comme la lumière)



Cas dynamique



Le but de l'expérience de Michelson-Morley était de mesurer la vitesse de l'*éther* relativement à la Terre en mesurant la vitesse de la lumière dans différentes directions. Ils s'attendaient à ce que leurs mesures varient selon la vitesse de l'*éther*.



- A - Source le lumière monochromatique
- B - Miroir semi réfléchissant
- C - Miroirs
- D - Déphasage

On sait que l'état des interférences (constructives ou destructives) est directement lié à la phase relative des deux faisceaux. Afin de mieux visualiser l'*éther* on peut prendre l'exemple d'un bateau sur la mer où l'eau joue le rôle d'*éther*.

Temps de parcours du faisceau 1 :

$$t_1 = \frac{l_1}{c\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} + \frac{l_1}{c\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} = \frac{2l_1}{c\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$


 distance SM₁


 distance M₁S

Temps de parcours du faisceau 2 :

$$t_2 = \frac{l_2}{c-v} + \frac{l_2}{c+v} = \frac{2l_2}{c\left[1-\left(\frac{v}{c}\right)^2\right]}$$


 distance SM₂


 distance M₂S

Si on prend $l = l_1 = l_2$ on trouve pour le retard entre les deux faisceaux:

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{2l}{c} \left(\frac{1}{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2} - \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} \right)$$

si $v = 0 \rightarrow \Delta t = 0$

si $v \neq 0 \rightarrow \Delta t \neq 0$

Il reste néanmoins deux problèmes :

- Le mouvement de la Terre
- La précision requise pour obtenir $l_1 = l_2$

Michelson-Morley pensèrent à faire subir une rotation de 90° à leur appareil. De cette manière ils pourraient détecter la différence de phase (uniquement si $v \neq 0$) entre les deux faisceaux. Il faut donc recalculer la différence de parcours. Après rotation les résultats précédents peuvent être réutilisés mais en changeant les indices :

$$\left. \begin{aligned} t'_1 &= \frac{2l_2}{c \left[1 - \left(\frac{v}{c} \right)^2 \right]} \\ t'_2 &= \frac{2l_1}{c \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c} \right)^2}} \end{aligned} \right\} \Delta t' = t'_2 - t'_1 = \frac{2l_2}{c \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c} \right)^2}} - \frac{2l_1}{c \left[1 - \left(\frac{v}{c} \right)^2 \right]}$$

On doit aussi recalculer Δt car $l_1 \neq l_2$: $\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{2l_2}{c \left[1 - \left(\frac{v}{c} \right)^2 \right]} - \frac{2l_1}{c \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c} \right)^2}}$

Donc la différence après rotation est : $\Delta t - \Delta t' = \frac{2}{c} (l_1 + l_2) \left\{ \frac{1}{c \left[1 - \left(\frac{v}{c} \right)^2 \right]} - \frac{1}{c \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c} \right)^2}} \right\}$

si on suppose que $v/c \ll 1$, alors : $\Delta t - \Delta t' = (l_1 + l_2) \frac{v^2}{c^3}$

Michelson-Morley n'observèrent aucun décalage significatif des franges, même en changeant l'orientation de leur interféromètre ou en faisant les observations de nuit.



l'éther n'existe pas

I.2.2 l'expérience W. Bertozzi (1964)

Énergie et quantité de mouvement (impulsion) sont des grandeurs importantes en mécanique en raison des lois de conservations qui leur sont associées. Jusqu'en 1905, on admettait que la masse m (inerte) d'un objet en mouvement est une constante, énergie cinétique E_c et impulsion $P=mv$ étant reliées entre elles par:

$$E_c = \frac{p^2}{2m}$$

En 1964 W. Bertozzi a conçu, à des fins pédagogiques, une expérience permettant de mesurer la vitesse (u) d'électrons de grande énergie en fonction de leur énergie cinétique (E_c). Le tableau ci-dessous récapitule l'ensemble des résultats obtenus

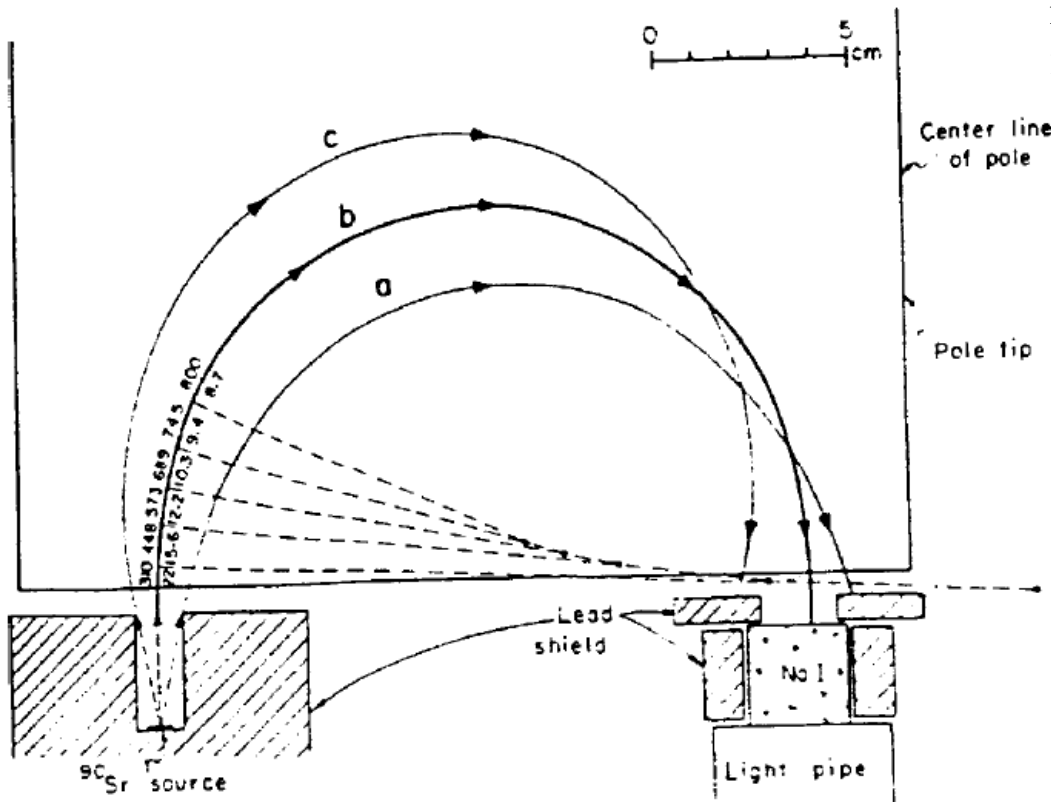
<i>Énergie</i>	<i>vitesse mesurée</i>	<i>vitesse calculée</i>
M.e.V. (10^6 e.V.)	u/c	v_N/c
0.5	0.867	1.4
1	0.910	2
1.5	0.960	2.4
4.5	0.987	4.4
15	1.	8

Vitesse obtenue par la
théorie classique en
désaccord

Vitesse
limite

I.2.3 l'expérience de Sherwood Parker (1972)

Pour préciser la relation entre **énergie et impulsion**, un montage simple et compact (**Sherwood Parker, *Am. J. of Phys.* 40-241 [1972]**) utilise comme objets en mouvement les **électrons d'assez grande énergie**, émis par une **source radioactive β** : du Strontium 90. Un champ magnétique uniforme oblige ces particules chargées à décrire des demi-cercles au bout desquels on les compte par un dispositif qui mesure en même temps leur énergie cinétique

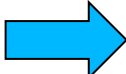


Une particule chargée dans un champ magnétique **B** a une **trajectoire circulaire de rayon**

$$R = \frac{P}{qB} = \frac{mv}{qB}$$

où q est la charge et **B** est perpendiculaire au plan. Dans l'expérience, les électrons sont collimatés de façon à donner à leur vitesse initiale une direction orthogonale à celle du champ magnétique.

Le détecteur est disposé à une distance d (variable) de la source dans une direction également orthogonale au champ.

 **Sélection de P**

On mesure la hauteur des signaux, proportionnelle à l'énergie cinétique de l'électron incident, en fonction de la distance d entre source et détecteur, ce qui revient à mesurer E_c en fonction de P .

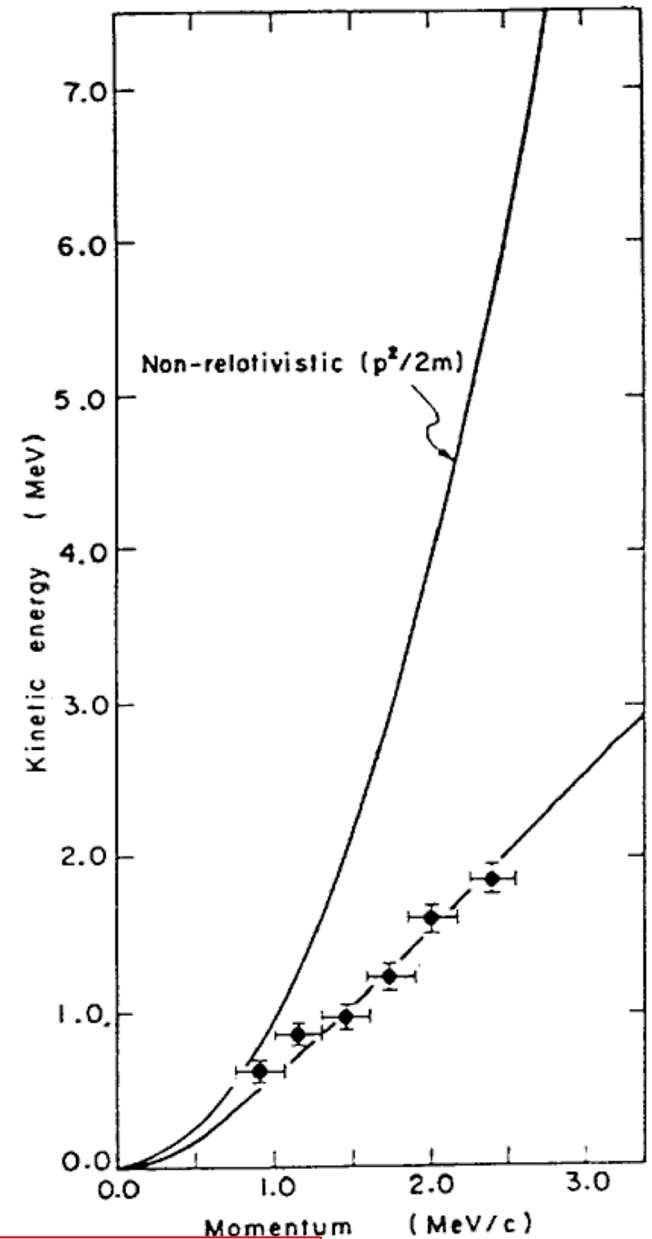
Lorsque l'énergie dépasse 1 Mev, la variation expérimentale (*cercles pleins avec barres d'erreur*) est plutôt :

$$E_c = PC - 0.5 \text{ Mev}$$

Cette relation, associée à l'existence d'une vitesse limite égale à C , n'est pas compatible avec une masse indépendante de la vitesse. Dans de telles expériences la masse apparaît comme le seul paramètre libre. **La masse dépendrait-elle de la vitesse?**

Ces expériences interrogent sur le principe très ancien (Galilée), de l'égalité des référentiels d'inertie devant les lois de la physique par un principe d'invariance de la vitesse de la lumière.

Une conséquence naturelle en est la « **transformation de Lorentz** » qui régit les changements de coordonnées entre référentiels en mouvement uniforme.



Dès 1905 Albert Einstein avait émis la théorie de la relativité restreinte permettant de résoudre ces problèmes (et bien d'autres...)

I.3 Les principes de la théorie de la relativité restreinte

Pour formuler sa nouvelle théorie Albert Einstein s'est appuyé sur la mécanique classique et les travaux de Lorentz. En fait il a gardé de la mécanique classique uniquement les principes qui lui paraissait corrects et leur ajouta deux postulats afin d'expliquer les problèmes de l'électromagnétisme par exemple.

Premier principe:

L'espace et le temps sont des entités distinctes dont les notions sont acquises de façon intuitives. l'espace possède trois dimensions et le temps n'en a qu'une.

Dans un référentiel donné tout événement est repéré par ses quatre composantes

Deuxième principe:

l'espace est euclidien



l'espace obéit à la géométrie d'Euclide, par exemple le plus court chemin entre deux points est la ligne droite

Troisième principe:

l'espace et le temps sont homogènes



Il n'existe pas dans l'espace ou le temps aucun point privilégiés, donc aucune origine absolue

Quatrième principe:

l'espace est isotrope.



Aucune direction n'est privilégiée

Cinquième principe ou principe de la relativité :

Toutes les lois de la physique sont covariantes (ont la même forme) dans tout changement de référentiel galiléen.

Sixième principe :

La vitesse dans le vide des ondes électromagnétiques est un invariant indépendant des référentiels. Sa valeur est :

$$2.99792458 \times 10^8 \text{ m/s} \pm 1.2 \text{ m/s}$$



La vitesse de la lumière est constante dans le vide. Un observateur au repos ou en mouvement (même à grande vitesse) mesurera la même vitesse pour l'onde lumineuse

Ce dernier principe permet d'expliquer parfaitement le résultat de l'expérience de Michelson Morley.

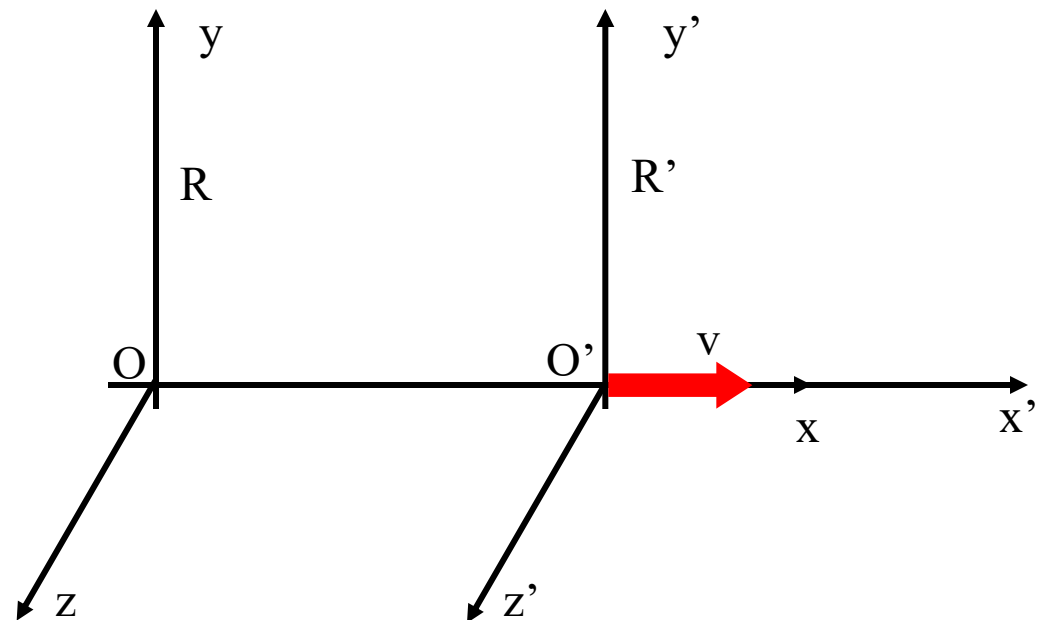
Il ne sera question dans ce cours que de la relativité restreinte où les référentiels sont considérés galiléens. Ils sont donc animés les uns par rapport aux autres de mouvements de translation rectiligne et uniforme. Le cas général (mouvement quelconque) est traité par la relativité générale.

Les équations de Maxwell ne sont pas covariantes par la transformation de Galilée (cinquième principe), il faut donc trouver une nouvelle transformation.

I.4 La transformation de Lorentz

Nous recherchons des formules de transformation des coordonnées :

Linéaires pour respecter l'homogénéité de l'espace et du temps.



Prenons par exemple le couple (x', t') et essayons de trouver la relation les reliant à x, y, z et t . du fait de la **linéarité** des relations on peut écrire :

$$\begin{cases} x' = \gamma x + nt + \alpha y + bz \\ t' = lt + px + qy + rz \end{cases} \quad (1)$$

Si on effectue une rotation autour de Ox (ou Ox'), seul y et z seront changés. Pour rotation de 90° :

$$\begin{aligned} y &\rightarrow z \\ z &\rightarrow -y \\ \Rightarrow \begin{cases} x' = \gamma x + nt + \alpha z - by \\ t' = lt + px + qz - ry \end{cases} \end{aligned} \quad (2)$$

En combinant les équations (1) et (2), on obtient :

$$\begin{cases} (\alpha + b)y = (\alpha - b)z \\ (q + r)y = (q - r)z \end{cases}$$

Ces relations doivent être vérifiées pour tout couple (y, z) .

On a donc :

$$\alpha = b = 0 \quad \text{et} \quad q = r = 0$$

Donc les équations (1) se simplifient :

$$\begin{cases} x' = \gamma(v)x + n(v)t \\ t' = l(v)t + p(v)x \end{cases} \quad (3)$$

Les différents coefficients étant a priori fonction de v .

Prenons maintenant le couple (y', z') , on peut écrire :

$$y' = ay + \mu z + \eta x + \lambda t \quad (4)$$

Or si on effectue une rotation de 90° autour de Ox (ou Ox'), on aura les changements suivant :

$$\begin{aligned} y &\rightarrow z \text{ et } y' \rightarrow z' \\ z &\rightarrow -y \text{ et } z' \rightarrow -y' \end{aligned}$$

On en déduit facilement l'expression de z' :

$$z' = az - \mu y + \eta x + \lambda t \quad (5)$$

Si on effectue alors une symétrie par rapport au plan xOy ($x'Oy'$), on a donc :

$$\begin{aligned} y &\rightarrow y \text{ et } y' \rightarrow y' \\ z &\rightarrow -z \text{ et } z' \rightarrow -z' \end{aligned}$$

Les équations (4) et (5) deviennent :

$$\begin{cases} y' = ay - \mu z + \eta x + \lambda t \\ -z' = -az - \mu y + \eta x + \lambda t \end{cases} \quad (6)$$

En regroupant les équations (4) à (6), il vient :

$$\begin{cases} y' = ay + \eta x + \lambda t \\ z' = az \end{cases}$$

Or les directions Oy - O'y' et Oz - O'z' sont équivalentes



Relations semblables
pour y' et z'.

$$\Rightarrow \eta = \lambda = 0$$

$$\begin{cases} y' = a(v)y \\ z' = a(v)z \end{cases}$$

Finalement à l'aide de ces considérations de symétrie on peut simplifier les formules de transformation :

$$\begin{cases} x' = \gamma(v)x + n(v)t \\ t' = l(v)t + p(v)x \\ y' = a(v)y \\ z' = a(v)z \end{cases} \quad (7)$$

Considérons le mouvement de l'origine O' de R' dans R : $\begin{cases} x = vt \\ x' = 0 \end{cases}$

La première équation du système (7) s'écrit : $x' = 0 = \gamma(v)vt + n(v)t = [\gamma(v)v + n(v)]t$
 $\Rightarrow n(v) = -\gamma(v)v$

Considérons le mouvement de l'origine O de R dans R' : $\begin{cases} x = 0 \\ x' = -vt' \end{cases}$

La première équation du système (7) s'écrit : $-v = \frac{x'}{t'} = -\frac{\gamma(v)vt}{l(v)t}$
 $\Rightarrow l(v) = \gamma(v)$

Le système (7) devient :

$$\begin{cases} x' = \gamma(v)[x - vt] \\ t' = \gamma(v)t + p(v)x \\ y' = a(v)y \\ z' = a(v)z \end{cases} \quad (8)$$

En utilisant l'invariance de la vitesse de la lumière dans le vide. On aurait pour la propagation suivant l'axe x d'un photon émis à l'instant initial à l'origine des référentiels :

$$x - ct = 0 \Leftrightarrow x' - ct' = 0$$

$$\begin{aligned} \text{Grâce (8) on peut écrire : } x' - ct' &= \gamma(v)[x - vt] - c[\gamma(v)t + p(v)x] \\ &= \gamma(v)[ct - vt] - c[\gamma(v)t + p(v)ct] \\ &= -\gamma(v)vt - c^2 p(v)t \\ &\Leftrightarrow p(v) = -\frac{v\gamma(v)}{c^2} \end{aligned} \quad \Rightarrow \begin{cases} x' = \gamma(v)[x - vt] \\ t' = \gamma(v)\left[t - \frac{v}{c^2}x\right] \\ y' = a(v)y \\ z' = a(v)z \end{cases}$$

Le passage de R à R' doit avoir une écriture identique à celui de R' à R au changement près de v et $-v$:

$$x = \gamma(v)[x' + vt'] = \gamma(v)\left[\gamma(v)[x - vt] + v\gamma(v)\left[t - \frac{v}{c^2}x\right]\right]$$

$$\Leftrightarrow \gamma^2(v)\left[1 - \frac{v^2}{c^2}\right] = 1$$

$$\Leftrightarrow \gamma(v) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

On a choisi la racine positive pour γ car les axes Ox et $O'x'$ sont orientés dans le même sens

Il ne reste plus qu'à déterminer $a(v)$. Considérons maintenant un photon se propageant suivant l'axe Oy du référentiel (R). A $t=0$ le photon est en O.

$$\left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ y = ct \\ z = 0 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} x' = -\gamma(v)vt = -v\gamma(v)\frac{y}{c} \\ t' = \gamma(v)t = \gamma(v)\frac{y}{c} \\ y' = a(v)ct \\ z' = 0 \end{array} \right.$$

A $t=0$ les deux référentiels coïncident, à l'instant t' le photon aura parcouru dans (R') la distance ct' .

$$\begin{aligned} x'^2 + y'^2 &= c^2 t'^2 \\ \gamma^2(v) \frac{v^2}{c^2} + a^2(v) &= \gamma^2(v) \\ \Rightarrow a^2(v) &= \gamma^2(v) \left[1 - \frac{v^2}{c^2} \right] = 1 \\ \Leftrightarrow a^2(v) &= 1 \end{aligned}$$

Nous venons donc de trouver la transformation permettant de changer de référentiel. Cette transformation n'est uniquement valable pour les référentiels en mouvement rectiligne uniforme les uns par rapport aux autres.

Transformée de Lorentz

$$\begin{array}{ccc}
 \left\{ \begin{array}{l} x' = \gamma[x - \beta.ct] \\ y' = y \\ z' = z \\ ct' = \gamma[ct - \beta.x] \end{array} \right. & & \beta = \frac{v}{c} \\
 \text{ou} & & \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \\
 \left\{ \begin{array}{l} x = \gamma(x' + \beta.ct') \\ y = y' \\ z = z' \\ ct = \gamma(ct' + \beta.x') \end{array} \right. & \text{avec} &
 \end{array}$$

Ecriture matricielle

Matrice de passage de R à R'

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ ct' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\gamma\beta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\gamma\beta & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ ct \end{pmatrix}$$

Matrice de passage de R' à R

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ ct \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & \gamma\beta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \gamma\beta & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ ct' \end{pmatrix}$$

Remarque : si v est très petit devant c on peut donc négliger le terme β^2 devant 1, on retrouve la transformée de Galilée.

$$\begin{cases} x' = (x - vt) \\ y' = y \\ z' = z \\ ct' = \left(ct - \frac{v}{c} \cdot x \right) = ct \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = (x - vt) \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = t \end{cases}$$

I.5 Les quadrivecteurs

La notion de quadrivecteur est essentielle en relativité restreinte car elle permet de simplifier les changements de référentiel galiléen.

Définitions

Un élément $\tilde{Q}$ de l'espace vectoriel $\mathcal{R}^4 = \mathcal{R} \times \mathcal{R} \times \mathcal{R} \times \mathcal{R}$ est un quadrivecteur si cet élément représente une grandeur physique et s'il se transforme dans un changement de référentiel galiléen en obéissant aux relations de la transformation de Lorentz :

$$\begin{cases} Q'_1 = Q_1 \\ Q'_2 = Q_2 \\ Q'_3 = \gamma(Q_3 - \beta \cdot Q_4) \\ Q'_4 = \gamma(Q_4 - \beta \cdot Q_3) \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{aligned} \beta &= \frac{v}{c} \\ \gamma &= (1 - \beta^2)^{-1/2} \end{aligned}$$

l'exemple le plus simple étant le quadrivecteur position ou événement :

$$\tilde{r} = \begin{cases} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ ct \end{cases} \quad \text{ou encore } \tilde{r} = (\vec{r}, ct)$$

Produit scalaire de deux quadrivecteurs

Le produit scalaire de deux quadrivecteurs est défini par :

$$\langle \tilde{Q}, \tilde{W} \rangle = \tilde{Q} \bullet \tilde{W} = Q_1 W_1 + Q_2 W_2 + Q_3 W_3 - Q_4 W_4$$

On dit que deux quadrivecteurs sont orthogonaux si : $\langle \tilde{Q}, \tilde{W} \rangle = \tilde{Q} \bullet \tilde{W} = 0$

Théorème

Le produit scalaire de deux quadrivecteurs est un invariant pour la transformation de Lorentz

$$\langle \tilde{Q}, \tilde{W} \rangle = \langle \tilde{Q}', \tilde{W}' \rangle$$

Démonstration :

$$\tilde{Q} = \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \tilde{W} = \begin{pmatrix} W_1 \\ W_2 \\ W_3 \\ W_4 \end{pmatrix}$$

$$\langle \tilde{Q}, \tilde{W} \rangle = Q_1 W_1 + Q_2 W_2 + Q_3 W_3 - Q_4 W_4$$

$$\tilde{Q}' = \begin{pmatrix} Q'_1 \\ Q'_2 \\ Q'_3 \\ Q'_4 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \tilde{W}' = \begin{pmatrix} W'_1 \\ W'_2 \\ W'_3 \\ W'_4 \end{pmatrix}$$

$$\langle \tilde{Q}', \tilde{W}' \rangle = Q'_1 W'_1 + Q'_2 W'_2 + Q'_3 W'_3 - Q'_4 W'_4$$

$$\tilde{Q}' = \begin{cases} Q'_1 = Q_1 \\ Q'_2 = Q_2 \\ Q'_3 = \gamma(Q_3 - \beta Q_4) \\ Q'_4 = \gamma(Q_4 - \beta Q_3) \end{cases} \quad \text{et} \quad \tilde{W} = \begin{cases} W'_1 = W_1 \\ W'_2 = W_2 \\ W'_3 = \gamma(W_3 - \beta W_4) \\ W'_4 = \gamma(W_4 - \beta W_3) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \langle \tilde{Q}', \tilde{W}' \rangle &= Q_1 W_1 + Q_2 W_2 + \gamma^2 (Q_3 - \beta Q_4)(W_3 - \beta W_4) - \gamma^2 (Q_4 - \beta Q_3)(W_4 - \beta W_3) \\ &= Q_1 W_1 + Q_2 W_2 + \gamma^2 Q_3 W_3 - \beta \gamma^2 Q_3 W_4 - \beta \gamma^2 Q_4 W_3 + \beta^2 \gamma^2 Q_4 W_4 \\ &\quad - \gamma^2 Q_4 W_4 + \gamma^2 \beta Q_4 W_3 + \gamma^2 \beta Q_3 W_4 - \gamma^2 \beta^2 Q_3 W_3 \\ &= Q_1 W_1 + Q_2 W_2 + \gamma^2 Q_3 W_3 + \beta^2 \gamma^2 Q_4 W_4 - \gamma^2 Q_4 W_4 - \gamma^2 \beta^2 Q_3 W_3 \\ &= Q_1 W_1 + Q_2 W_2 + \gamma^2 (1 - \beta^2) Q_3 W_3 - \gamma^2 (1 - \beta^2) Q_4 W_4 \\ &= Q_1 W_1 + Q_2 W_2 + \frac{1}{(1 - \beta^2)} (1 - \beta^2) Q_3 W_3 - \frac{1}{(1 - \beta^2)} (1 - \beta^2) Q_4 W_4 \\ &= Q_1 W_1 + Q_2 W_2 + Q_3 W_3 - Q_4 W_4 \end{aligned}$$

$$\langle \tilde{Q}', \tilde{W}' \rangle = \langle \tilde{Q}, \tilde{W} \rangle \quad \text{CQFD}$$

I.6 Les conséquences de la transformée de Lorentz

I.6.1 Intervalle d'espace ou d'univers

Considérons deux événements E et E* définis dans un référentiel galiléen R. Les quadrivecteurs espace temps associés sont : $\tilde{r} = (\vec{r}, ct) = (x_1, x_2, x_3, ct)$

$$\tilde{r}^* = (\vec{r}^*, ct^*) = (x_1^*, x_2^*, x_3^*, ct^*)$$

Ces événements sont séparés dans R de la quantité : $\Delta\tilde{r} = \tilde{r} - \tilde{r}^*$

 La quantité $\Delta\tilde{r}$ est un quadrivecteur.

Définition

On appelle intervalle d'espace ou d'univers de deux événements E et E* le produit scalaire de $\Delta\tilde{r}$ par lui-même :

$$\Delta\tilde{r}^2 = \Delta\tilde{r} \Delta\tilde{r}$$

 d'après les propriétés de la transformée de Lorentz, on peut remarquer que l'intervalle d'espace est un invariant par cette transformation

$$\Delta\tilde{r}^2 = \Delta\tilde{r}'^2$$



Cette propriété est aussi valable pour les événements infiniment proches, c'est-à-dire :

$$d\tilde{r}^2 = d\tilde{r}'^2$$

Simultanéité

Supposons que les deux événements E et E* considérés précédemment sont simultanés :



$$t = t^*$$

$$\Rightarrow \Delta\tilde{r} = [x_1 - x_1^*, x_2 - x_2^*, x_3 - x_3^*, c(t - t^*)]$$

$$\Rightarrow \Delta\tilde{r} = [x_1 - x_1^*, x_2 - x_2^*, x_3 - x_3^*, 0]$$

$$\Delta\tilde{r} = [\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3, 0]$$

Dans un autre référentiel galiléen R' (se déplaçant à une vitesse v par rapport au référentiel R) ce quadrivecteur devient :

$$\Delta r' = [x'_1 - x'^*_1, x'_2 - x'^*_2, x'_3 - x'^*_3, c(t' - t'^*)]$$

$$\Delta r' = [\Delta x'_1, \Delta x'_2, \Delta x'_3, c\Delta t']$$

On connaît les relations liant les composantes de $\Delta\tilde{r}$ et de $\Delta r'$ car R et R' sont deux référentiels galiléens en mouvement l'un par rapport à l'autre.

Les paramètres de la transformée de Lorentz permettant de passer de R à R' sont γ et β . On peut donc écrire :

$$\begin{array}{ccc}
 \Delta r = \begin{array}{|l} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \Delta x_3 \\ c\Delta t \end{array} & \xLeftrightarrow{TL} & \Delta r' = \begin{array}{|l} \Delta x'_1 = \Delta x_1 \\ \Delta x'_2 = \Delta x_2 \\ \Delta x'_3 = \gamma[\Delta x_3 - \beta.c\Delta t] \\ c\Delta t' = \gamma[c\Delta t - \beta\Delta x_3] \end{array} \\
 \text{Simultanéité} & & \\
 \text{dans R} & & \text{Non simultanéité} \\
 & & \text{dans R'}
 \end{array}$$

On remarque que deux événements simultanés dans un référentiel galiléen ne le sont pas forcément dans un autre. Ce résultat est totalement différent de ce que l'on a l'habitude de concevoir en mécanique classique où la simultanéité présente un caractère absolu.

On remarque aussi que l'intervalle de temps dans le référentiel R' ($\Delta t'$) peut être positif ou négatif. Il existe donc des référentiels galiléens où l'événement E précède l'événement E* et d'autres où c'est le contraire (cf. causalité I.6.4).

I.6.2 Transformation des longueurs

Pour parler de transformation des longueurs il faut évidemment définir correctement ce qu'est la longueur d'un objet.

Définition

On appelle distance de deux points de vitesse relative nulle :

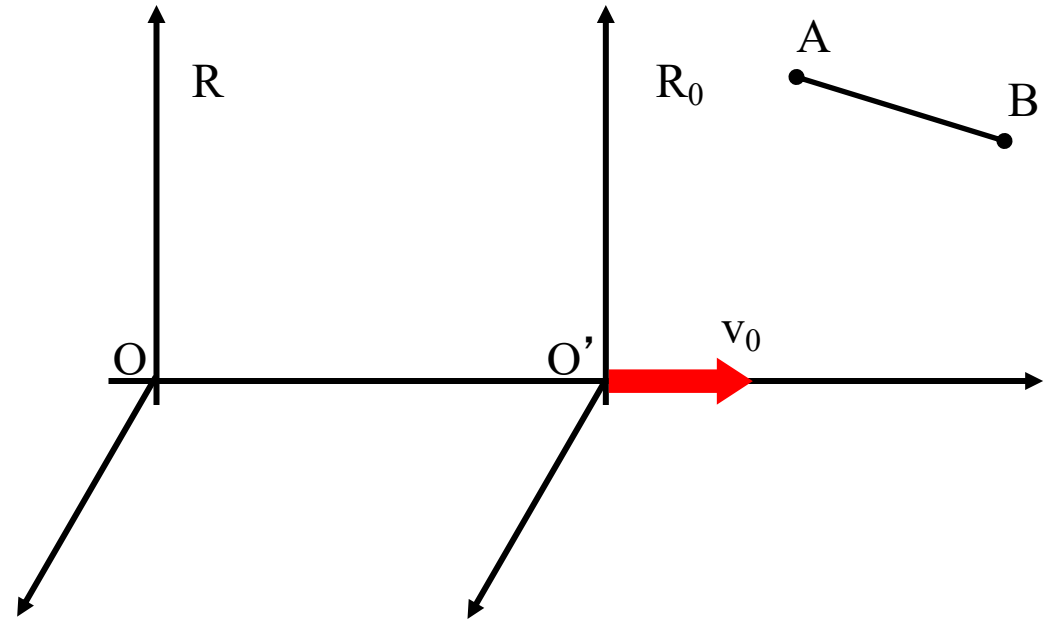
- Soit la distance géométrique de ces deux points dans un référentiel où ces deux points sont immobiles. Ce référentiel porte le nom de référentiel propre des deux points et cette distance porte le nom de distance propre
- Soit la distance géométrique de ces deux points dont les positions sont relevées au même instant de date t (= simultanéité) dans un référentiel où ces deux points sont en mouvement.

Considérons une règle AB au repos (vitesse relative nulle) dans le référentiel R_0 . Il représente donc le référentiel propre de la règle. Les coordonnées de ses extrémités A et B sont dans le référentiel R_0

$$\rho_A = \begin{vmatrix} \rho_{1A} \\ \rho_{2A} \\ \rho_{3A} \end{vmatrix} \text{ et } \rho_B = \begin{vmatrix} \rho_{1B} \\ \rho_{2B} \\ \rho_{3B} \end{vmatrix} \Rightarrow \Delta\rho = \begin{vmatrix} \rho_{1B} - \rho_{1A} \\ \rho_{2B} - \rho_{2A} \\ \rho_{3B} - \rho_{3A} \end{vmatrix}$$

Ces mesures peuvent être effectuées à des temps différents puisque nous sommes dans le référentiel propre de la règle. Donc les quadrivecteurs espace temps associés aux deux événements sont donc :

$$\tilde{\rho}_A = \begin{vmatrix} \rho_{1A} \\ \rho_{2A} \\ \rho_{3A} \\ c\tau_A \end{vmatrix} \text{ et } \tilde{\rho}_B = \begin{vmatrix} \rho_{1B} \\ \rho_{2B} \\ \rho_{3B} \\ c\tau_B \end{vmatrix} \Rightarrow \Delta\tilde{\rho} = \begin{vmatrix} \rho_{1B} - \rho_{1A} \\ \rho_{2B} - \rho_{2A} \\ \rho_{3B} - \rho_{3A} \\ c(\tau_B - \tau_A) \end{vmatrix}$$



Maintenant si nous effectuons la mesure des deux extrémités de la règle dans le référentiel R mobile par rapport à R_0 . Les deux quadrivecteurs associés aux deux événements sont donc :

$$\tilde{\mathbf{r}}_A = \begin{vmatrix} x_{1A} \\ x_{2A} \\ x_{3A} \\ ct_A \end{vmatrix} \text{ et } \tilde{\mathbf{r}}_B = \begin{vmatrix} x_{1B} \\ x_{2B} \\ x_{3B} \\ ct_B \end{vmatrix} \Rightarrow \Delta\tilde{\mathbf{r}} = \begin{vmatrix} x_{1B} - x_{1A} = \Delta x_1 \\ x_{2B} - x_{2A} = \Delta x_2 \\ x_{3B} - x_{3A} = \Delta x_3 \\ c(t_B - t_A) = c\Delta t \end{vmatrix}$$

Les mesures effectuées dans les référentiels R_0 et R sont liées par la transformée de Lorentz, on a donc :

$$\begin{aligned} \Delta\rho_1 &= \Delta x_1 \\ \Delta\rho_2 &= \Delta x_2 \\ \Delta\rho_3 &= \gamma[\Delta x_3 - \beta \cdot c\Delta t] \\ c\Delta\tau &= \gamma[c\Delta t - \beta \cdot \Delta x_3] \end{aligned} \quad \begin{aligned} \beta &= \frac{V_0}{c} \\ \gamma &= \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \end{aligned}$$

Nous désirons que dans le référentiel R les quantités Δx_1 , Δx_2 et Δx_3 nous permettent de mesurer la distance qui sépare les points A et B. Puisque dans ce référentiel les deux points A et B sont en mouvement, on ne peut obtenir leur distance que si on a simultanéité des mesures :

$$\Delta t = t_B - t_A = 0$$

On a donc en définitive :

$$\begin{aligned}\Delta\rho_1 &= \Delta x_1 \\ \Delta\rho_2 &= \Delta x_2 \\ \Delta\rho_3 &= \gamma\Delta x_3\end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned}\gamma &= [1 - \beta^2]^{-1/2} \\ \beta &= \frac{V_0}{c} \leq 1\end{aligned} \right\} \gamma \geq 1$$

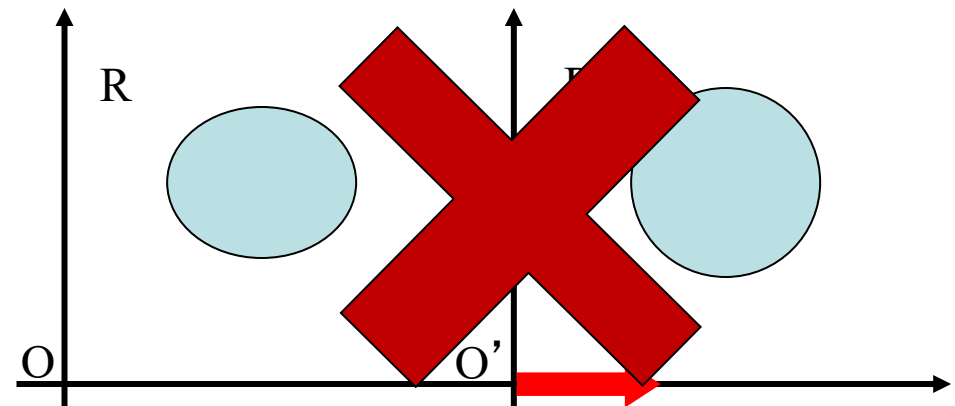
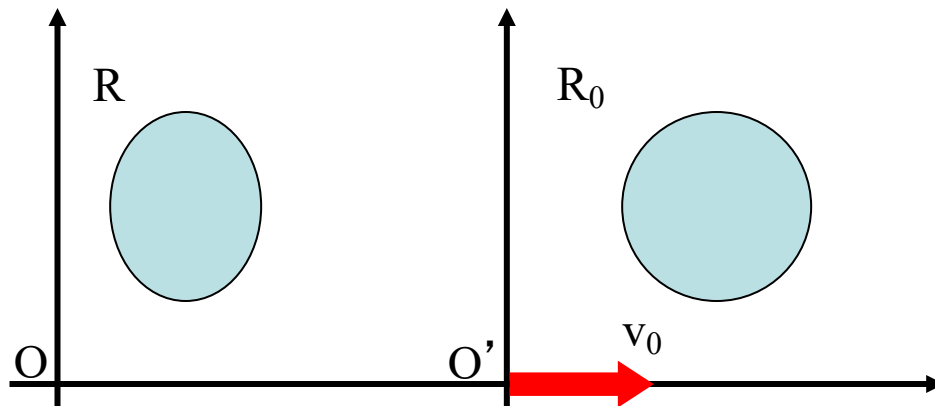


$$\Rightarrow \Delta x_3 < \Delta\rho_3$$

Ce résultat est appelé phénomène de *contraction des longueurs*. Il n'y a bien entendu dans la réalité pas possibilité de réduire les longueurs, c'est tout simplement la mesure de la longueur qui n'est pas la même uniquement dans la direction du mouvement.

Remarque: Il est donc impossible de faire passer une table de 3m sur 4m par une fenêtre de 1m de large. Certaines idées similaires avaient été émises peu de temps après la parution de la théorie de la relativité restreinte.

Déformation d'un objet : Comment l'objet est-il déformé?



I.6.3 Transformation des temps

Définition

Intervalle de temps : temps séparant les manifestations d'un événement se produisant en un même point de l'espace et mesuré dans un référentiel où le point est au repos (= référentiel propre).

Durée : Intervalle de temps mesuré dans un référentiel arbitraire.

Dilatation des durées

Considérons un événement se produisant en un point fixe ayant pour coordonnées dans R_0 :

$$\rho = \begin{vmatrix} \rho_x \\ \rho_y \\ \rho_z \end{vmatrix}$$

Cet événement est supposé durer de l'instant τ_1 à τ_2 , l'intervalle de temps est donc :

$$\Delta\tau = \tau_2 - \tau_1$$

On peut donc écrire deux quadrivecteurs espace temps donnant la durée de vie de l'événement :

$$\left. \begin{array}{l} \text{Début de l'événement : } \tilde{\rho}_1 = \begin{pmatrix} \rho_x \\ \rho_y \\ \rho_z \\ c\tau_1 \end{pmatrix} \\ \text{Fin de l'événement : } \tilde{\rho}_2 = \begin{pmatrix} \rho_x \\ \rho_y \\ \rho_z \\ c\tau_2 \end{pmatrix} \end{array} \right\} \Rightarrow \Delta\tilde{\rho} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ c(\tau_2 - \tau_1) = c\Delta\tau \end{pmatrix}$$

Un observateur d'un autre référentiel galiléen R essaye de mesurer la durée de cet événement. Il note précisément le début et la fin :

$$\left. \begin{array}{l} \text{Début de l'événement : } \tilde{\mathbf{r}}_1 = \begin{pmatrix} \mathbf{r}_{1x} \\ \mathbf{r}_{1y} \\ \mathbf{r}_{1z} \\ ct_1 \end{pmatrix} \\ \text{Fin de l'événement : } \tilde{\mathbf{r}}_2 = \begin{pmatrix} \mathbf{r}_{2x} \\ \mathbf{r}_{2y} \\ \mathbf{r}_{2z} \\ ct_2 \end{pmatrix} \end{array} \right\} \Rightarrow \Delta\tilde{\mathbf{r}} = \begin{pmatrix} \mathbf{r}_{2x} - \mathbf{r}_{1x} \\ \mathbf{r}_{2y} - \mathbf{r}_{1y} \\ \mathbf{r}_{2z} - \mathbf{r}_{1z} \\ c(t_2 - t_1) = c\Delta t \end{pmatrix}$$

Le référentiel R_0 a une vitesse de V_0 par rapport à R suivant l'axe Oz.

A l'aide de la transformée de Lorentz on peut en déduire la relation entre $\Delta\tau$ et Δt :

$$\left. \begin{array}{l} ct_1 = \gamma[ct_1 + \beta\rho_z] \\ ct_2 = \gamma[ct_2 + \beta\rho_z] \end{array} \right\} c\Delta t = \gamma c\Delta\tau$$



$$\Delta t = \gamma \Delta\tau$$

Ce résultat est appelé phénomène de *dilatation des durées*.

$$\left. \begin{array}{l} \gamma = [1 - \beta^2]^{-1/2} \\ \beta = \frac{V_0}{c} \leq 1 \end{array} \right\} \gamma \geq 1$$



$$\Delta t > \Delta\tau$$

Remarque: Les relations que nous venons d'établir concernant les transformations des longueurs et des durées ne sont valables que si l'un des référentiels galiléens de la transformation est *référentiel propre*.

Paradoxe des jumeaux

Pierre et Paul sont deux jumeaux. Ils sont tout les deux à un instant t sur une base de lancement de fusée. Paul monte dans la fusée et quitte le repère (R) où Pierre est immobile. Paul effectue son voyage à très grande vitesse (voisine de c). Au bout d'un certain temps Paul rejoint Pierre.

Les deux jumeaux sont-ils encore jumeaux?

Réponse : Chacun des jumeaux voit l'autre se déplacer et considère qu'il est plus jeune. En effet, un intervalle de temps ($\Delta\tau$) mesuré dans le référentiel lié à un des jumeaux a pour valeur dans celui de son frère : $\Delta t = \gamma \Delta\tau$.

- Ils ne sont donc plus jumeaux!
- Problème : leurs conclusions sont contradictoires.

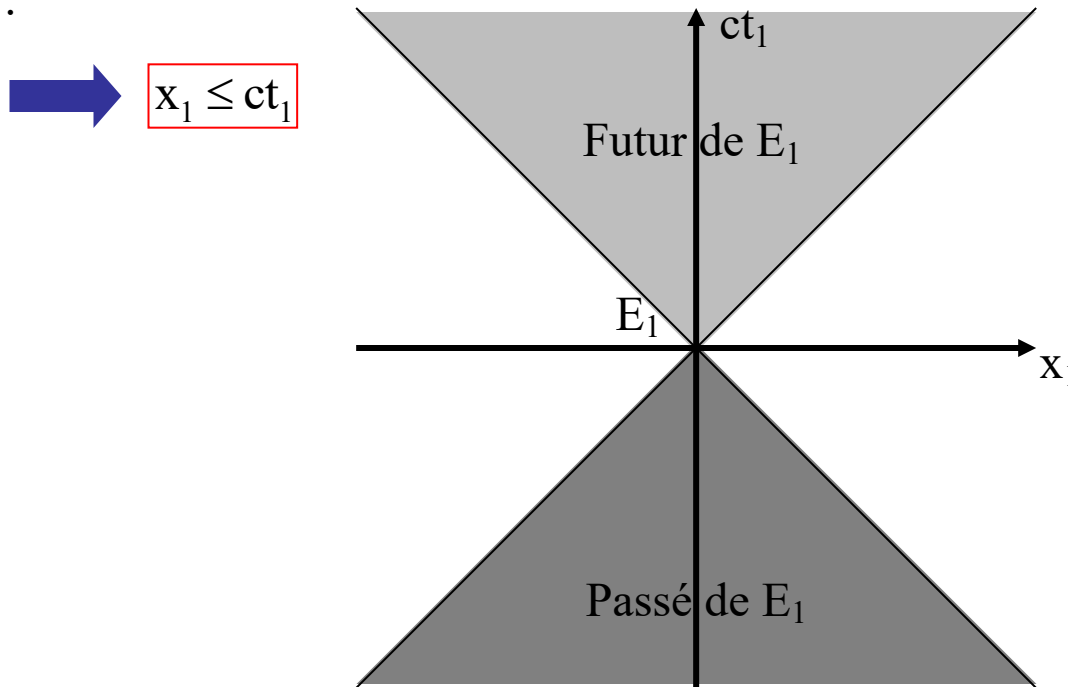
On doit remarquer que pour quitter et retrouver Pierre, Paul a dû subir des accélérations. On sort donc du cadre de la relativité restreinte.

I.6.4 Principe de causalité

En physique classique, un événement E_1 ne peut être la cause d'un événement E_2 que s'il est intervenu avant, donc E_1 est antérieur à E_2 .

Dans le cas relativiste la formulation de ce principe doit être reconsidérée car compte tenu du caractère relatif de la simultanéité, on peut penser que l'ordre des deux événements sera fonction du repère où on les observe.

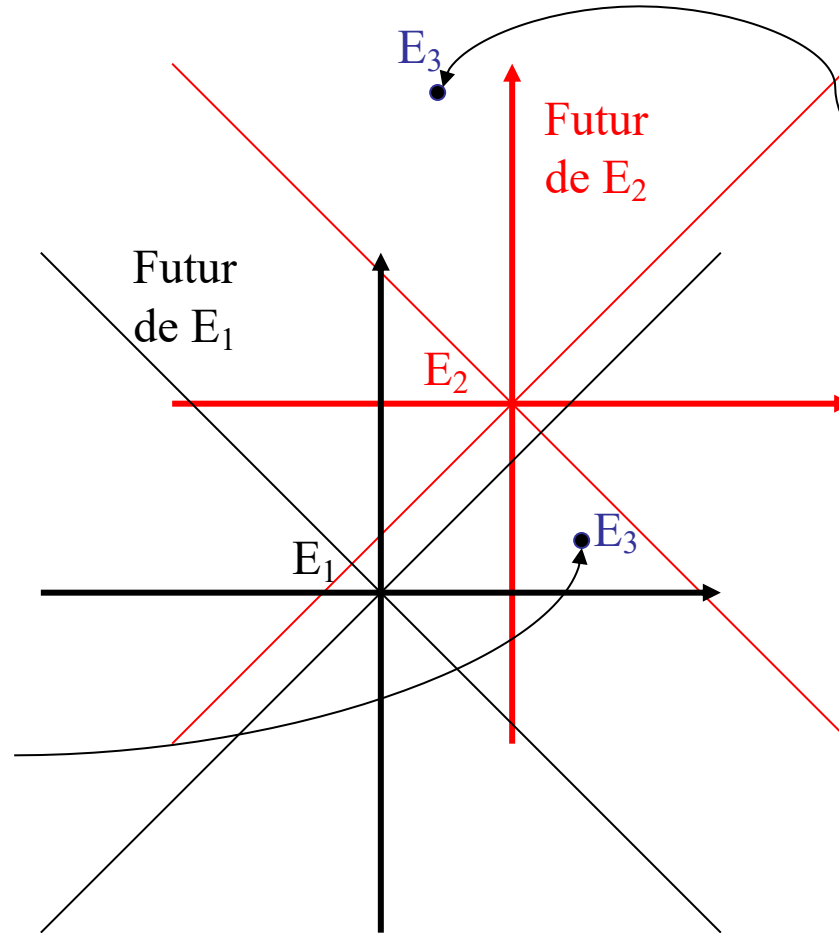
Nous considèrerons que E_1 correspond à la position d'une particule à un instant t_1 donné. La position de la particule à un instant postérieur ou antérieur à t_1 ne peut se trouver ailleurs que dans le “cône de lumière” de E_1 . Ce cône est défini par la valeur limite de la vitesse d'une particule :



Les zones non ombrées sont interdites par les postulats de la relativité.

Deux événements ne pourront être reliés par un signal ou une relation causale que s'ils sont dans le cône de lumière l'un de l'autre.

Si E_3 est dans le passé de E_2 , lui même dans le futur de E_1 , alors E_3 n'est pas nécessairement dans le cône de lumière de E_1 . Donc si E_1 et E_3 peuvent être la cause de E_2 , il n'y a aucun lien de causalité entre eux.



Si E_3 est dans le futur de E_2 , lui même dans le futur de E_1 , alors E_3 est nécessairement dans le futur de E_1 . Donc si E_1 est la cause de E_2 qui est lui même la cause de E_3 , alors E_1 peut être la cause de E_3 .

Soit un repère où E_1 et E_2 sont séparés par une distance L et apparaissent aux temps t_1 et $t_2=t_1+T$.
 E_1 ne peut entraîner E_2 que si :

$$t_2 > t_1 + \frac{L}{c} \Rightarrow T > \frac{L}{c} \Rightarrow L^2 - c^2 T^2 < 0$$

L'intervalle d'espace vérifie : $\Delta \tilde{r}^2 < 0$

Si $\Delta \tilde{r}^2 < 0$: on dit que l'intervalle est du genre “temps”. Les deux événements peuvent être reliés par un signal se propageant moins vite que la vitesse de la lumière et donc qu’il peut y avoir causalité.

Si $\Delta \tilde{r}^2 > 0$: Aucun signal ne peut donc avoir relié les deux événements, ce qui exclut la causalité.

Si $\Delta \tilde{r}^2 = 0$: les deux événements peuvent avoir été reliés par un signal se propageant à la vitesse de la lumière. Nous dirons alors que l'intervalle est du genre “lumière”.

d'après les propriétés de la transformée de Lorentz ($\Delta \tilde{r}^2 = \Delta \tilde{r}'^2$) la causalité relativiste garde un sens dans un changement de repère Galiléen. Donc les notions de passé et de futur sont des invariants relativistes.

I.7 Cinématique relativiste

En mécanique classique nous savons que pour tout changement de référentiel on peut définir une transformée des coordonnées et en déduire une loi de composition des vitesses et une loi de composition des accélérations.

I.7.1 Lois de composition des vitesses

Dans un référentiel R un point matériel M possède à chaque instant t un rayon vecteur $\vec{r}$

$$\Rightarrow \vec{r} = (x_1, x_2, x_3)$$

et une vitesse $\vec{v}$

$$\Rightarrow \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \left(\frac{dx_1}{dt}, \frac{dx_2}{dt}, \frac{dx_3}{dt} \right)$$

Dans un référentiel R' un point matériel M' possède à chaque instant t' un rayon vecteur $\vec{r}'$

$$\Rightarrow \vec{r}' = (x'_1, x'_2, x'_3)$$

et une vitesse $\vec{v}'$

$$\Rightarrow \vec{v}' = \frac{d\vec{r}'}{dt'} = \left(\frac{dx'_1}{dt'}, \frac{dx'_2}{dt'}, \frac{dx'_3}{dt'} \right)$$

Dans l'hypothèse (évidemment) où les deux référentiels R et R' sont galiléen on a en désignant par V la vitesse de R' par rapport à R :

$$r' = \begin{cases} x'_1 = x_1 \\ x'_2 = x_2 \\ x'_3 = \alpha[x_3 - \beta \cdot ct] \\ ct' = \alpha[ct - \beta \cdot x_3] \end{cases}$$

$$\beta = \frac{V}{c}$$
$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

On en déduit donc :

$$\text{dr}' = \begin{cases} dx'_1 = dx_1 \\ dx'_2 = dx_2 \\ dx'_3 = \alpha[dx_3 - \beta.cdt] \\ cdt' = \alpha[cdt - \beta.dx_3] \end{cases} \longleftrightarrow \begin{aligned} dt' &= \alpha \left[dt - \frac{\beta}{c}.dx_3 \right] = \alpha dt \left[1 - \frac{\beta}{c} \cdot \frac{dx_3}{dt} \right] = \alpha dt \left[1 - \frac{\beta}{c} \cdot v_3 \right] \\ \frac{dt}{dt'} &= \frac{1}{\alpha \left[1 - \frac{\beta}{c} \cdot v_3 \right]} \end{aligned}$$

On en déduit donc :

$$\begin{aligned} v'_1 &= \frac{dx'_1}{dt'} = \frac{dx_1}{dt'} = \frac{dx_1}{dt} \frac{dt}{dt'} = \frac{v_1}{\alpha \left[1 - \frac{\beta}{c} \cdot v_3 \right]} \\ v'_2 &= \frac{dx'_2}{dt'} = \frac{v_2}{\alpha \left[1 - \frac{\beta}{c} \cdot v_3 \right]} \\ v'_3 &= \frac{dx'_3}{dt'} = \frac{v_3 - V}{\left[1 - \frac{\beta}{c} \cdot v_3 \right]} \end{aligned}$$

I.7.1 Lois de composition des accélérations

Dans un référentiel R un point matériel M possède à chaque instant t un rayon vecteur $\vec{r}$

$$\Rightarrow \vec{r} = (x_1, x_2, x_3)$$

, une vitesse $\vec{v}$

$$\Rightarrow \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \left(\frac{dx_1}{dt}, \frac{dx_2}{dt}, \frac{dx_3}{dt} \right) = (v_1, v_2, v_3)$$

et une accélération $\vec{\gamma}$

$$\Rightarrow \vec{\gamma} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \left(\frac{dv_1}{dt}, \frac{dv_2}{dt}, \frac{dv_3}{dt} \right)$$

Dans un référentiel R' un point matériel M' possède à chaque instant t' un rayon vecteur $\vec{r}'$

$$\Rightarrow \vec{r}' = (x'_1, x'_2, x'_3)$$

, une vitesse $\vec{v}'$

$$\Rightarrow \vec{v}' = \frac{d\vec{r}'}{dt'} = \left(\frac{dx'_1}{dt'}, \frac{dx'_2}{dt'}, \frac{dx'_3}{dt'} \right) = (v'_1, v'_2, v'_3)$$

et une accélération $\vec{\gamma}'$

$$\Rightarrow \vec{\gamma}' = \frac{d\vec{v}'}{dt'} = \left(\frac{dv'_1}{dt'}, \frac{dv'_2}{dt'}, \frac{dv'_3}{dt'} \right)$$

Comme précédemment : $\gamma'_1 = \frac{dv'_1}{dt'} = \frac{dv'_1}{dt} \frac{dt}{dt'} = \frac{d}{dt} \left[\frac{v_1}{\alpha \left[1 - \frac{\beta}{c} \cdot v_3 \right]} \right] \frac{dt}{dt'}$

$$= \frac{\frac{dv_1}{dt} \cdot \alpha \left[1 - \frac{\beta}{c} \cdot v_3 \right] + v_1 \frac{\alpha \beta}{c} \cdot \frac{dv_3}{dt}}{\alpha^2 \left[1 - \frac{\beta}{c} \cdot v_3 \right]^2} \frac{dt}{dt'}$$

Ce qui donne :

$$\gamma'_1 = \frac{\gamma_1}{\alpha^2 \left[1 - \frac{\beta}{c} \cdot v_3 \right]^2} + \frac{\beta}{c} \frac{v_1 \cdot \gamma_3}{\alpha^2 \left[1 - \frac{\beta}{c} \cdot v_3 \right]^3}$$

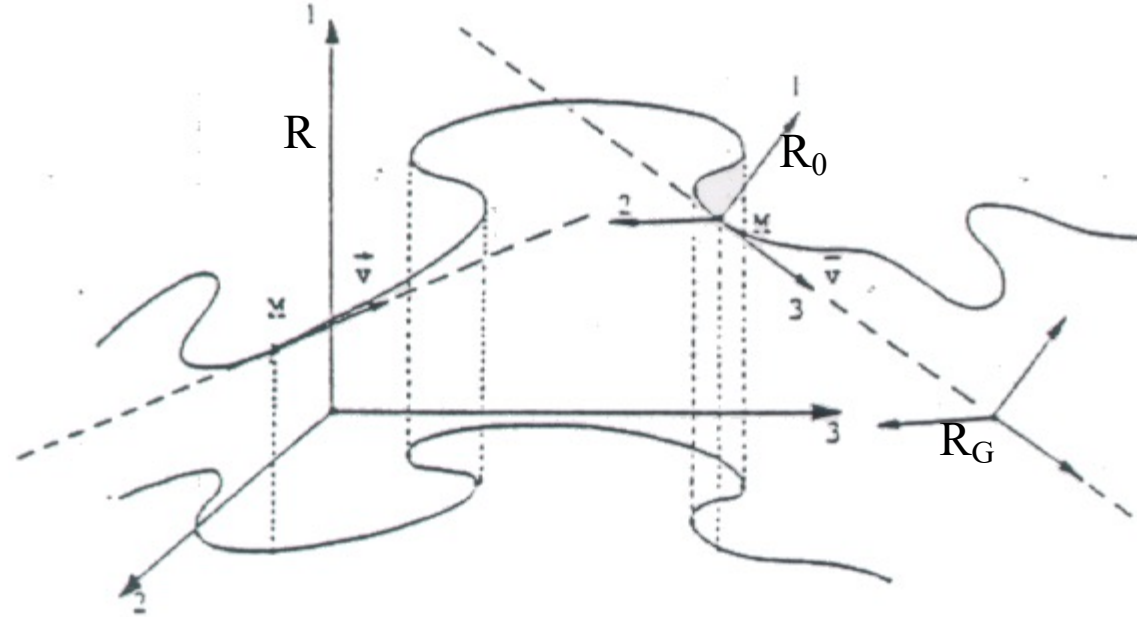
On peut faire le même calcul pour toutes les composantes, ce qui nous donne :

$$\begin{aligned} \gamma'_1 &= \frac{\gamma_1}{\alpha^2 \left[1 - \frac{\beta}{c} \cdot v_3 \right]^2} + \frac{\beta}{c} \frac{v_1 \cdot \gamma_3}{\alpha^2 \left[1 - \frac{\beta}{c} \cdot v_3 \right]^3} \\ \gamma'_2 &= \frac{\gamma_2}{\alpha^2 \left[1 - \frac{\beta}{c} \cdot v_3 \right]^2} + \frac{\beta}{c} \frac{v_2 \cdot \gamma_3}{\alpha^2 \left[1 - \frac{\beta}{c} \cdot v_3 \right]^3} \\ \gamma'_3 &= \frac{\gamma_3}{\alpha^3 \left[1 - \frac{\beta}{c} \cdot v_3 \right]^3} \end{aligned}$$

I.8 Quadrivecteurs Vitesse et Accélération

I.8.1 Repère galiléen tangent

Considérons un point matériel M qui se déplace dans un référentiel galiléen R avec la vitesse $\vec{v}(t)$ non constante. A chaque instant on peut définir un repère $R_0(t)$ ayant pour origine M et animé d'une vitesse $\vec{v}(t)$ par rapport à R .



➡ Ce repère R_0 est donc un repère propre, mais il n'est pas galiléen

A chaque instant pourtant il existe un repère galiléen $R_G(t)$ coïncidant avec $R_0(t)$. Donc le mouvement de M peut être décrit par une succession de repères galiléens tangents à la trajectoire.

➡ Il existe donc à tout instant une transformation de Lorentz permettant de passer de R à $R_G(t)$ et donc à $R_0(t)$.

Pour pouvoir passer d'un référentiel à l'autre, il faudra à chaque instant définir une transformée de Lorentz. On peut aussi utiliser l'invariance du produit scalaire de l'intervalle d'espace infinitésimal par lui-même lorsque l'on passe d'un repère à l'autre. On a donc :

$$d\tilde{r}^2 = d\tilde{r}_0^2 = d\tilde{r}_G^2$$

$$\begin{array}{l} d\tilde{r} = (dx_1, dx_2, dx_3, cdt) \\ d\tilde{r}_0 = (0, 0, 0, cd\tau) \end{array} \quad \longrightarrow \quad \begin{array}{l} d\tilde{r}^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 - c^2 dt^2 = d\vec{r}^2 - c^2 dt^2 \\ d\tilde{r}_0^2 = -c^2 d\tau^2 \\ d\vec{r}^2 - c^2 dt^2 = -c^2 d\tau^2 \end{array}$$

Le mouvement du point M est régi dans le référentiel R par la relation : $d\vec{r} = \vec{v}.dt$

$$\begin{array}{l} \longrightarrow \vec{v}^2 dt^2 - c^2 dt^2 = -c^2 d\tau^2 \\ \Rightarrow (v^2 - c^2) dt^2 = -c^2 d\tau^2 \\ \Rightarrow dt^2 = \frac{-c^2}{(v^2 - c^2)} d\tau^2 = \frac{c^2}{(c^2 - v^2)} d\tau^2 \end{array} \quad \Rightarrow dt = \sqrt{\frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}}} d\tau = \gamma d\tau$$

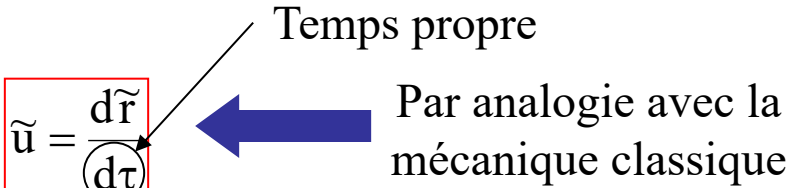
Dilatation des temps

I.8.2 Quadrivecteur Vitesse

Considérons dans un référentiel R un point M dont le quadrivecteur espace temps est :

$$\tilde{\mathbf{r}} = (\vec{\mathbf{r}}, ct) = (x_1, x_2, x_3, ct)$$

Définition

Le quadrivecteur vitesse est donné par : $\tilde{\mathbf{u}} = \frac{d\tilde{\mathbf{r}}}{d\tau}$ 

$$\left. \begin{array}{l} \tilde{\mathbf{u}} = \frac{d\tilde{\mathbf{r}}}{d\tau} \\ d\tilde{\mathbf{r}} = (dx_1, dx_2, dx_3, cdt) \\ dt = \gamma d\tau \end{array} \right\} \tilde{\mathbf{u}} = \frac{d\tilde{\mathbf{r}}}{d\tau} = \gamma \frac{d\tilde{\mathbf{r}}}{dt} = \gamma \left(\frac{dx_1}{dt}, \frac{dx_2}{dt}, \frac{dx_3}{dt}, c \right) \quad \longrightarrow \quad \boxed{\tilde{\mathbf{u}} = (\gamma \vec{\mathbf{v}}, \gamma c)}$$

Le quadrivecteur vitesse se transforme en obéissant aux relations de la transformée de Lorentz dans un changement de référentiel galiléen :

$$\begin{array}{l} u'_1 = u_1 \\ u'_2 = u_2 \\ u'_3 = \gamma[u_3 - \beta \cdot u_4] \\ u'_4 = \gamma[u_4 - \beta \cdot u_3] \end{array} \quad \text{avec} \quad \begin{array}{l} \beta = \frac{V}{c} \\ \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \end{array}$$

Le quadrivecteur vitesse possède aussi les propriétés liées à la transformée de Lorentz, en particulier l'invariance du produit scalaire :

$$\begin{aligned}
 \tilde{u}^2 &= \gamma^2 (v^2 - c^2) \\
 &= -\gamma^2 c^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) \\
 \tilde{u}^2 &= -\frac{1}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)} c^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)
 \end{aligned}
 \quad \longrightarrow \quad
 \boxed{\tilde{u}^2 = -c^2}$$

I.8.3 Quadrivecteur Accélération

Définition

Le quadrivecteur accélération est donné par : $\tilde{\gamma} = \frac{d\tilde{u}}{d\tau}$

↙ Temps propre

Le quadrivecteur accélération se transforme en obéissant aux relations de la transformée de Lorentz dans un changement de référentiel galiléen :

$$\begin{aligned} \gamma'_1 &= \gamma_1 \\ \gamma'_2 &= \gamma_2 \\ \gamma'_3 &= \gamma[\gamma_3 - \beta \cdot \gamma_4] \\ \gamma'_4 &= \gamma[\gamma_4 - \beta \cdot \gamma_3] \end{aligned} \quad \text{avec} \quad \begin{aligned} \beta &= \frac{V}{c} \\ \gamma &= \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \end{aligned}$$

Le quadrivecteur accélération possède aussi les propriétés liées à la transformée de Lorentz, en particulier l'invariance du produit scalaire :

$$\tilde{\gamma}^2 = \tilde{\gamma}'^2$$

On a établi précédemment en appliquant l'invariance du produit scalaire que : $\tilde{u}^2 = -c^2$

Dérivons cette expression par rapport au temps propre :

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau}(\tilde{u}^2) &= 2\tilde{u} \frac{d\tilde{u}}{d\tau} = \frac{d}{d\tau}(-c^2) \\ \Rightarrow 2\tilde{u}\tilde{\gamma} &= 0 \end{aligned}$$

 **Les quadrivecteurs vitesse et accélération d'un point matériel sont constamment orthogonaux.**