

II Dynamique Relativiste

La théorie de la relativité restreinte a été édifée dans le but d'étendre le principe de relativité à toutes les lois de la physique dans un changement de repère galiléen. Par exemple la relation fondamentale de la dynamique notamment est invariante par la transformée de Galilée. Or elle n'est pas relativiste car elle n'est pas invariante par transformation de Lorentz. Il faut donc reformuler toutes les lois de la physique.

II.1 Dynamique du point matériel

II.1.1 Masse propre d'un point matériel

Considérons un point matériel M en mouvement dans un référentiel R . Désignons par $\vec{v}$ sa vitesse à un instant t quelconque.

La mécanique de Newton, lorsque la vitesse est petite ou le rapport v/c est très petit, montre qu'elle prédit parfaitement le comportement d'un point matériel. Ce cas limite doit être vérifié par la mécanique relativiste. On définit donc en mécanique relativiste de la même manière qu'en mécanique classique la notion de masse d'un point matériel à condition de parler de sa masse propre.



On appelle masse propre m_0 ou masse au repos d'un point matériel la masse de ce point dans son référentiel propre.

II.1.2 Quadrivecteur quantité de mouvement

Le point matériel M de masse propre m_0 se déplaçant avec une vitesse $\vec{v}$ dans un référentiel R possède un quadrivecteur vitesse :

$$\tilde{u} = (\gamma\vec{v}, \gamma c)$$

En multipliant par la masse propre m_0 on obtient encore un quadrivecteur qui s'apparente à la définition classique du vecteur quantité de mouvement. Donc par définition le quadrivecteur quantité de mouvement sera :

$$\tilde{p} = m_0 \tilde{u} = (\gamma m_0 \vec{v}, \gamma m_0 c)$$

On définit aussi la masse relativiste : $m = \gamma m_0$

On en déduit une autre écriture du quadrivecteur quantité de mouvement :

$$\tilde{p} = (\vec{p}, mc)$$

II.1.3 Principe fondamental de la dynamique

Soit M un point matériel de masse propre m_0 se déplaçant avec une vitesse $\vec{v}$ dans un référentiel galiléen R. La résultante $\vec{f}$ dans ce référentiel, des forces appliquées à ce point est donnée par la relation :

$$\vec{f} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

Où $\vec{p}$ désigne la quantité de mouvement du point dans le référentiel

$$\vec{p} = m\vec{v} = \gamma m_0 \vec{v}$$

et t désigne le temps de ce référentiel

Remarque : D'après le principe de relativité d'Einstein, toutes les lois de la physique sont invariantes de forme dans un changement de référentiel galiléen. Donc le principe fondamental de la dynamique s'écrit dans R' :

$$\vec{f}' = \frac{d\vec{p}'}{dt'}$$

II.1.4 Travail d' une force, Energie de masse

Par définition le travail infinitésimal dE d'une force $\vec{f}$ exprimée dans un référentiel galiléen R au cours d'un déplacement élémentaire $\vec{dr}$ est :

$$dE = \vec{f} \cdot \vec{dr}$$

Soit le point matériel M de masse propre m_0 se déplaçant avec une vitesse $\vec{v}$ dans un référentiel R. Si $\vec{f}$ est la résultante dans R des forces appliquées à ce point, on a :

$$d\vec{r} = \vec{v}.dt$$

$$\Rightarrow dE = \vec{f} \cdot d\vec{r} = \vec{f} \cdot \vec{v}.dt$$

$$\Rightarrow dE = \frac{d\vec{p}}{dt} \cdot \vec{v}.dt = \vec{v} \cdot d(m\vec{v}) = \vec{v}(\vec{v}dm + m d\vec{v})$$

$$\Rightarrow dE = \vec{v}^2 dm + m \vec{v} d\vec{v}$$

$$\text{Or } 2\vec{v}d\vec{v} = d\vec{v}^2 = dv^2 = 2vdv$$

$$\Rightarrow \vec{v}d\vec{v} = vdv$$

$$\text{Et } m = \gamma m_0 = m_0 \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \Leftrightarrow \frac{dm}{m} = -\frac{1}{2} \frac{d\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)} = \frac{d(v^2)}{2(c^2 - v^2)} = \frac{v dv}{c^2 - v^2}$$

Finalelement :

$$dE = \vec{v}^2 dm + m(c^2 - v^2) \frac{dm}{m}$$

$$= v^2 dm + m(c^2 - v^2) \frac{dm}{m}$$

L'expression du travail élémentaire est donc : $dE = c^2 dm$

Le travail total de la résultante des forces appliquées au point matériel entre deux points A et B de sa trajectoire s'obtient en sommant toutes les quantités infinitésimal dE :

Intégrale curviligne

$$\Delta E = \int_A^B c^2 dm$$

$$\Delta E = m_B c^2 - m_A c^2$$

On appelle par définition *énergie de masse* du point matériel la quantité : $E = mc^2$

Donc le travail des forces appliquées à un point matériel entre deux points de sa trajectoire est égale à la variation de l'énergie de masse entre ces deux points.

II.1.5 Energie propre ou Energie de masse au repos

Lorsqu'un point matériel est au repos sa masse relativiste m est en fait sa masse propre m_0 et son énergie de masse devient alors : $E_0 = m_0 c^2$

On appelle par définition cette énergie de masse : énergie propre ou énergie de masse au repos

II.1.6 Energie cinétique

On appelle énergie cinétique d'un point matériel la différence entre son énergie de masse et son énergie propre :

$$T = E - E_0$$

Remarque : La relation suivante est vérifiée

$$dT = dE = \vec{f} \cdot d\vec{r} = \vec{f} \cdot \vec{v} \cdot dt$$

II.1.7 Quelques quadrivecteurs usuels

- ✓ Quadrivecteur espace temps : $\tilde{\mathbf{r}} = (\vec{\mathbf{r}}, ct)$
- ✓ Quadrivecteur infinitésimal espace temps : $d\tilde{\mathbf{r}} = (d\vec{\mathbf{r}}, cdt)$
- ✓ Quadrivecteur vitesse : $\tilde{\mathbf{u}} = (\gamma\vec{\mathbf{v}}, \gamma c)$
- ✓ Quadrivecteur accélération : $\tilde{\gamma} = \left(\frac{d\tilde{\mathbf{u}}}{d\tau}, c \frac{d\gamma}{d\tau} \right)$
- ✓ Quadrivecteur quantité de mouvement: $\tilde{\mathbf{p}} = (\gamma m_0 \vec{\mathbf{v}}, \gamma m_0 c) = (m\vec{\mathbf{v}}, mc) = (\vec{\mathbf{p}}, mc)$
- ✓ Quadrivecteur force : $\tilde{\mathbf{f}} = \left(\gamma \vec{\mathbf{f}}, \gamma \frac{\vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{\mathbf{f}}}{c} \right)$
- ✓ Quadrivecteur moment angulaire ou moment cinétique : $\tilde{\mathbf{l}} = (\vec{\mathbf{r}} \wedge \vec{\mathbf{p}}, ct\vec{\mathbf{p}} - m c \vec{\mathbf{r}})$
- ✓ Quadrivecteur Intensité : $\tilde{\mathbf{j}} = (\vec{\mathbf{j}}, c\rho)$
- ✓ Quadrivecteur potentiel vecteur : $\tilde{\mathbf{A}} = \left(\vec{\mathbf{A}}, \frac{V}{c} \right)$ $\vec{\mathbf{A}} = \text{potentiel vecteur}$
 $V = \text{potentiel scalaire}$

II.2 Quelques résultats utiles

Nous allons établir dans la suite quelques relations fondamentales de la mécanique relativiste.
Pour cela nous considérons un point matériel ayant :

- ❖ une masse propre : m_0
- ❖ une masse relativiste : $m = \gamma m_0$
- ❖ une quantité de mouvement : $\vec{p} = m\vec{v}$
- ❖ une énergie de masse : $E = mc^2$
- ❖ une énergie de masse propre : $E_0 = m_0 c^2$

II.2.1 Première relation

Calculons dans un premier temps le produit scalaire du quadrivecteur quantité de mouvement par lui-même :

$$\left. \begin{array}{l} \tilde{\mathbf{p}} \cdot \tilde{\mathbf{p}} = \tilde{p}^2 = p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 - m^2 c^2 \\ \text{avec } \bar{\mathbf{p}}^2 = p^2 = p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 \end{array} \right\} \tilde{p}^2 = p^2 - m^2 c^2$$

On a par définition :

$$\tilde{p} = m_0 \cdot \tilde{u}$$

$$\Rightarrow \tilde{p}^2 = (m_0 \cdot \tilde{u})^2 = m_0^2 \cdot \tilde{u}^2$$

$$\Rightarrow \tilde{p}^2 = -m_0^2 \cdot c^2$$

On a démontré précédemment que

$$\tilde{u}^2 = -c^2$$

Finalement on a :

$$\tilde{p}^2 = p^2 - m^2 c^2 = -m_0^2 \cdot c^2$$

$$\Rightarrow p^2 = m^2 c^2 - m_0^2 \cdot c^2$$



$$p^2 c^2 = E^2 - E_0^2$$

Ce résultat nous montre qu'une quantité de mouvement peut s'exprimer en unité d'énergie par c (par exemple Joules par c). On peut aussi voir que si le point matériel a une masse propre nulle (par exemple le ***photon***), il a une quantité de mouvement telle que :

$$p = \frac{E}{c}$$

II.2.2 Deuxième relation

A l'aide de la définition de l'énergie cinétique on peut récrire la relation précédente.

$$\begin{aligned} p^2 c^2 &= E^2 - E_0^2 = (E - E_0)(E + E_0) \\ &= (E - E_0)(E - E_0 + 2E_0) \end{aligned}$$


$$p^2 c^2 = T(T + 2E_0)$$

II.2.3 Troisième relation

Par définition de la quantité de mouvement :

$$\vec{p} = \gamma m_0 \vec{v} = m \vec{v}$$

$$\vec{p}c = m\vec{v}c = mc^2 \frac{\vec{v}}{c}$$


$$\frac{\vec{v}}{c} = \frac{\vec{p}c}{mc^2} = \frac{\vec{p}c}{E}$$

II.2.4 Quatrième relation

On tire de la relation précédente :

$$\frac{\vec{v}^2}{c^2} = \left(\frac{\vec{p}c}{E} \right)^2 = \frac{\vec{p}^2 c^2}{E^2} = \frac{E^2 - E_0^2}{E^2}$$


$$\frac{v}{c} = \sqrt{1 - \left(\frac{E_0}{E} \right)^2} = \sqrt{1 - \left(\frac{E_0}{T + E_0} \right)^2}$$

Ce résultat est très important. Il nous indique qu'il faut communiquer une énergie cinétique infiniment grande (comparativement à son énergie propre) à un point matériel pour qu'il ait une vitesse comparable (**mais inférieure**) à celle de la lumière. Donc la vitesse de la lumière apparaît comme une vitesse limite pour tout point matériel. Un cas particulier important se présente lorsque le point matériel a une **énergie propre nulle (le photon par exemple)**, car dans ce cas **il va toujours à la vitesse de la lumière quelle que soit son énergie cinétique**.

II.3 Systèmes de points matériels

Un système matériel (un atome, un ion, ...) quelconque peut toujours être considéré comme un système de points matériels. S'il contient en effet des corps de volume fini, il suffira de le décomposer en élément de volume suffisamment petit.

On peut distinguer deux types de système de points matériels :

- Les systèmes avec interaction mutuelle
- Les systèmes sans interaction mutuelle

II.3.1 Système isolé de points matériels avec interaction mutuelle

Si on considère un système matériel quelconque, il peut être caractérisé, dans un référentiel donné, par son énergie de masse E , par sa quantité de mouvement $\vec{P}$ et par sa masse M .

A chaque instant chaque particule du système possède une quantité de mouvement $\vec{p}_k$ et une énergie E_k . Il semblerait logique de dire que l'énergie de masse totale et la quantité de mouvement totale du système sont égales à la somme des énergies de masse et des quantités de mouvement de chaque particule.



$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{P} = \sum_{k=1}^N \vec{p}_k \\ E = \sum_{k=1}^N E_k \end{array} \right.$$

Si on considère la $k^{\text{ième}}$ particule, son état, énergie et mouvement, sont complètement définis par son quadrivecteur quantité de mouvement :

$$\tilde{p}_k = \left(\vec{p}_k, \frac{E_k}{c} \right)$$

Dans un autre référentiel galiléen R' , il s'écrira : $\tilde{p}'_k = \left(\vec{p}'_k, \frac{E'_k}{c} \right)$

On connaît la relation entre les deux quadrivecteurs : $\tilde{p}'_k = L(\tilde{p}_k)$


 L est la transformation de Lorentz

Il est donc possible d'écrire dans le référentiel R' :

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{P}' = \sum_{k=1}^N \vec{p}'_k \\ E' = \sum_{k=1}^N E'_k \end{array} \right.$$

Dans le référentiel R' les quantités transformées $\vec{p}'_k$ et E'_k ne sont pas obtenues simultanément puisque les quantités initiales ont été déterminées en des points d'espace différents (voir simultanéité). Les deux sommes précédentes concernent des quantités mesurées dans R' à des dates différentes, par conséquent sans aucun sens physique. Autrement dit, elles ne correspondent pas du tout à ce qu'un observateur de R' définirait de son point de vue.



Il est donc impossible d'exprimer la quantité de mouvement totale et l'énergie de masse totale d'un système matériel quelconque en fonction des quantités de mouvement et des énergies de masse de ses constituants.

II.3.2 Système isolé de points matériels sans interaction mutuelle

Chaque point étant sans interaction mutuelle cela entraîne que chaque point du système n'est soumis à aucune force (externe ou interne). C'est-à-dire que la résultante des forces appliquées est nulle, soit pour le point k :



$$\vec{f}_k = 0$$

La relation fondamentale de la dynamique s'écrit dans un référentiel galiléen :

$$\longrightarrow \frac{d\vec{p}_k}{dt} = \vec{f}_k = 0$$

La définition du travail d'une force nous donne :

$$\longrightarrow \frac{dE_k}{dt} = \vec{f}_k \cdot \vec{v}_k = 0$$

On a donc pour chaque particule: $\begin{cases} \vec{p}_k = \vec{C}_{ste} \\ E_k = C_{ste} \end{cases}$ ou $\tilde{\vec{p}}_k = \left(\vec{p}_k, \frac{E_k}{c} \right) = \tilde{C}_{ste}$

Dans un autre référentiel galiléen R', on aura

$$\begin{cases} p'_{1k} = p_{1k} \\ p'_{2k} = p_{2k} \\ p'_{3k} = \gamma \left[p_{3k} - \beta \cdot \frac{E_k}{c} \right] \\ \frac{E'_k}{c} = \gamma \left[\frac{E_k}{c} - \beta \cdot p_{3k} \right] \end{cases}$$

$$\gamma = (1 - \beta^2)^{1/2}$$

$$\beta = \frac{v}{c}$$

v vitesse de R' par rapport à R

Il est clair que les différentes quantités transformées $p'_{1k}, p'_{2k}, p'_{3k}$ et E'_k sont indépendantes du temps dès lors que les quantités initiales correspondantes p_{1k}, p_{2k}, p_{3k} et E_k le sont. Le quadrivecteur quantité de mouvement de chaque point matériel (ou particule) est donc une constante par rapport au temps et cela dans tout référentiel galiléen.



Le problème de la simultanéité rencontré précédemment n'existe évidemment plus.

On peut donc définir le quadrivecteur quantité de mouvement total du système :



$$\tilde{\mathbf{P}} = \left(\vec{\mathbf{P}}, \frac{E}{c} \right) = \left(\sum_{k=1}^N \vec{\mathbf{p}}_k, \sum_{k=1}^N \frac{E_k}{c} \right) = \sum_{k=1}^N \tilde{\mathbf{p}}_k$$

Le quadrivecteur quantité de mouvement d'un système isolé sans interaction mutuelle reste constant en fonction du temps :



$$\tilde{\mathbf{P}} = \tilde{\mathbf{C}}_{ste}$$

II.3.3 Référentiel du centre de masse d'un système isolé de points matériels sans interaction mutuelle

Définition

Le référentiel du centre de masse $R^\bullet$ (ou référentiel propre) d'un système isolé de points sans interaction mutuelle, est le référentiel privilégié dans lequel le vecteur quantité de mouvement total du système est nul. Autrement dit dans le référentiel du centre de masse on a :

$$\left. \begin{array}{l} \vec{P}^\bullet = \sum_{k=1}^N \vec{p}_k^\bullet = 0 \\ E^\bullet = \sum_{k=1}^N E_k^\bullet \end{array} \right\} \tilde{P}^\bullet = \left(0, \frac{E^\bullet}{c} \right)$$

Nous avons vu précédemment que la quantité de mouvement d'un système isolé de points matériels sans interaction mutuelle possède la propriété de rester constante au cours du temps. Le mouvement du référentiel du centre de masse est donc un mouvement de translation rectiligne et uniforme par rapport à n'importe quel référentiel galiléen.



Le référentiel $R^\bullet$ du centre de masse d'un système isolé de points sans interaction mutuelle est un référentiel galiléen

Remarque : La définition du référentiel du centre de masse est différente de celle que l'on prend en mécanique classique, qui est le barycentre du système de points. Ceci résulte du fait qu'en mécanique classique les masses des points sont constantes (indépendantes de leur vitesse).

Vitesse de translation du référentiel du centre de masse

Dans le référentiel R, le quadrivecteur quantité de mouvement du système s'écrit :

Dans le référentiel du centre de masse il a pour expression : $\tilde{\mathbf{P}}^\bullet = \left(\tilde{\mathbf{P}}^\bullet, \frac{E^\bullet}{c} \right)$

Ces deux quadrivecteurs sont reliés par la transformation de Lorentz :

$$\begin{cases} p_1^\bullet = p_1 \\ p_2^\bullet = p_2 \\ p_3^\bullet = \gamma \left[p_3 - \beta \cdot \frac{E}{c} \right] \\ \frac{E^\bullet}{c} = \gamma \left[\frac{E}{c} - \beta \cdot p_3 \right] \end{cases}$$

Or par définition : $\tilde{\mathbf{P}}^\bullet = \vec{0} \Leftrightarrow p_1^\bullet = p_2^\bullet = p_3^\bullet = 0$

La troisième composante de $\tilde{\mathbf{P}}^\bullet$ donne : $p_3^\bullet = \gamma \left[p_3 - \beta \cdot \frac{E}{c} \right] = 0$

$$\Rightarrow p_3 - \beta \cdot \frac{E}{c} = 0$$

$$\Rightarrow \beta = \frac{v}{c} = \frac{p_3 c}{E} = \frac{pc}{E}$$

puisque $\vec{P} = (0, 0, p_3)$

$$\vec{v} = \frac{\vec{P}c^2}{E}$$

La dernière composante de $\tilde{\mathbf{P}}^\bullet$ donne : $\frac{E^\bullet}{c} = \gamma \left[\frac{E}{c} - \beta \cdot p_3 \right]$

$$\Rightarrow E^\bullet = \gamma [E - \beta \cdot c \cdot p_3] = \gamma [E - \beta^2 \cdot E]$$

$$E^\bullet = \frac{E}{\gamma}$$

III Particules chargées dans des champs électriques ou magnétiques

III.1 Particules chargées dans un champ électrique uniforme et constant

Considérons une particule pénétrant à l'origine des temps avec une quantité de mouvement initiale $\vec{p}_0$ dans une région de l'espace où règne un champ $\vec{E}$ électrique uniforme et constant.

De plus, l'origine O est confondue avec la particule à l'origine des temps. Le champ électrique est parallèle à Oz et la quantité de mouvement initiale appartient au plan (yOz).

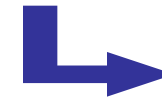
Dans ce repère, que nous supposons galiléen, la loi fondamentale de la dynamique **relativiste** s'écrit :

$$\left. \begin{aligned} \vec{f} &= \left(\gamma \vec{f}, \gamma \frac{\vec{v} \cdot \vec{f}}{c} \right) \\ \vec{p} &= (\gamma m_0 \vec{v}, \gamma m_0 c) = (m \vec{v}, mc) = (\vec{p}, mc) \\ dt &= \gamma d\tau \end{aligned} \right\} \gamma \frac{d(\vec{p}, mc)}{dt} = \gamma \left(\vec{f}, \frac{\vec{v} \cdot \vec{f}}{c} \right) \Rightarrow$$

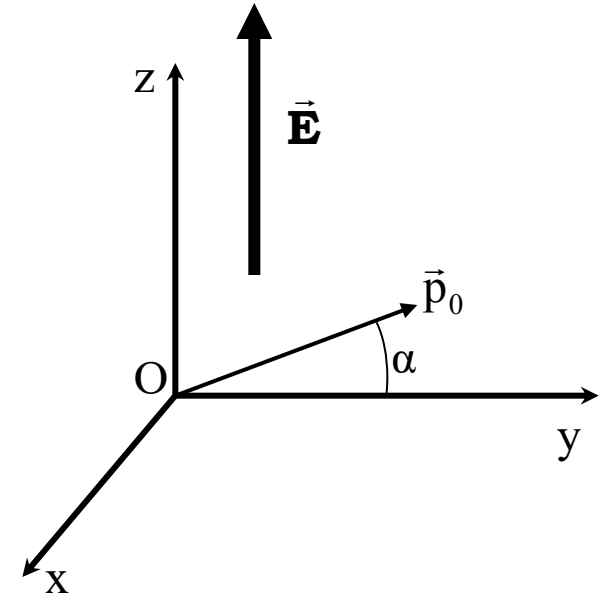
$$\frac{d\vec{p}}{d\tau} = \vec{f}$$

Il faut prendre le temps propre de la particule

$$\left| \begin{aligned} \frac{d\vec{p}}{dt} &= \vec{f} \\ \frac{d(mc)}{dt} &= \frac{\vec{v} \cdot \vec{f}}{c} \Leftrightarrow \frac{dE}{dt} = \vec{v} \cdot \vec{f} \end{aligned} \right.$$



$$\frac{dE}{dt} = \vec{v} \cdot \vec{f} = \vec{v} \cdot q \vec{E} = q \vec{E} \cdot \vec{v}_z$$



La première relation nous donne :

$$\begin{array}{ccccc}
 \xrightarrow{\quad} & \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{f} = q\vec{E} & \longleftrightarrow & \begin{array}{l} \frac{dp_x}{dt} = 0 \\ \frac{dp_y}{dt} = 0 \\ \frac{dp_z}{dt} = q\mathbf{E} \end{array} & \xrightarrow{\text{Intégration}} & \begin{array}{l} p_x = C^{te} \\ p_y = C^{te} \\ p_z = q\mathbf{E}t + C^{te} \end{array} & \xrightarrow{\text{Conditions Initiales}} & \begin{array}{l} p_x = 0 \\ p_y = p_{0y} \\ p_z = q\mathbf{E}t + p_{0z} \end{array}
 \end{array}$$

Connaissant la relation liant la vitesse, la quantité de mouvement et l'énergie on peut écrire :

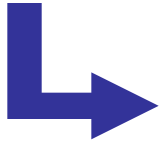
$$\frac{\vec{v}}{c} = \frac{\vec{p}c}{\textcircled{E}} \quad \leftarrow \text{Energie de la particule}$$

$$\begin{array}{l}
 \xrightarrow{\quad} \quad v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{p_x c^2}{E} = 0 \quad \longleftrightarrow \quad x = \int dx = \int v_x \cdot dt = C^{te} \quad \xrightarrow{\text{Conditions Initiales}} \quad \boxed{x = 0} \\
 v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{p_y c^2}{E} = \frac{p_{0y} c^2}{E} \\
 v_z = \frac{dz}{dt} = \frac{p_z c^2}{E} = \frac{(q\mathbf{E}t + p_{0z}) c^2}{E}
 \end{array}$$

D'après le paragraphe II.2, on sait : $p^2 c^2 = E^2 - E_0^2$

$$\Rightarrow E^2 = p^2 c^2 + E_0^2 = (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) c^2 + E_0^2$$

$$\Rightarrow E^2 = [p_{0y}^2 + (qEt + p_{0z})^2] c^2 + E_0^2$$



Donc l'énergie de la particule évolue au cours du temps et que par conséquent , un champ électrique uniforme peut être utilisé pour communiquer de l'énergie à une particule chargée.

On peut donc réécrire les composantes de la vitesse :

$$v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{p_{0y} c^2}{\sqrt{[p_{0y}^2 + (qEt + p_{0z})^2] c^2 + E_0^2}}$$

$$v_z = \frac{dz}{dt} = \frac{(qEt + p_{0z}) c^2}{\sqrt{[p_{0y}^2 + (qEt + p_{0z})^2] c^2 + E_0^2}}$$

En intégrant la composante de la vitesse sur l'axe Oy :

$$y = \int \frac{p_{0y} \cdot c^2}{\sqrt{[p_{0y}^2 + (qEt + p_{0z})^2] c^2 + E_0^2}} dt$$

$$= p_{0y} \cdot c \int \frac{dt}{\sqrt{p_{0y}^2 + \left(\frac{E_0}{c}\right)^2 + (qEt + p_{0z})^2}}$$

En posant :

$$u = \frac{(q\mathbf{E}t + p_{0z})}{\sqrt{p_{0y}^2 + \left(\frac{E_0}{c}\right)^2}} \Leftrightarrow du = \frac{q\mathbf{E}}{\sqrt{p_{0y}^2 + \left(\frac{E_0}{c}\right)^2}} dt$$

$$y = \frac{p_{0y} \cdot c}{q\mathbf{E}} \int \frac{du}{[1 + u^2]^{1/2}}$$

Cette primitive est connue : $\int \frac{du}{[1 + u^2]^{1/2}} = \text{ArgSh}(u) + C^{\text{te}}$

$$y = \frac{p_{0y} \cdot c}{q\mathbf{E}} \text{ArgSh}(u) + C^{\text{te}}$$

Conditions Initiales



$y = 0$ lorsque $t = 0 \Leftrightarrow$

$$y = \frac{p_{0y} \cdot c}{q\mathbf{E}} \left[\text{ArgSh} \left(\frac{(q\mathbf{E}t + p_{0z})}{\sqrt{p_{0y}^2 + \left(\frac{E_0}{c}\right)^2}} \right) - \text{ArgSh} \left(\frac{p_{0z}}{\sqrt{p_{0y}^2 + \left(\frac{E_0}{c}\right)^2}} \right) \right]$$

En intégrant la composante de la vitesse sur l'axe Oz :

$$v_z = \frac{dz}{dt} = \frac{(q\mathbf{E}t + p_{0z})c^2}{\sqrt{[p_{0y}^2 + (q\mathbf{E}t + p_{0z})^2]c^2 + E_0^2}}$$

En posant $u = (q\mathbf{E}t + p_{0z})c \Leftrightarrow du = q\mathbf{E}.c.dt$

$$\Rightarrow z = \int \frac{(q\mathbf{E}t + p_{0z})c^2}{\sqrt{[p_{0y}^2 + (q\mathbf{E}t + p_{0z})^2]c^2 + E_0^2}} dt = \int \frac{u.c}{\sqrt{p_{0y}^2 c^2 + E_0^2 + u^2}} \frac{du}{q\mathbf{E}.c}$$

$$\Rightarrow z = \frac{1}{q\mathbf{E}} \int \frac{u.du}{\sqrt{p_{0y}^2 c^2 + E_0^2 + u^2}} = \frac{1}{q\mathbf{E}} \sqrt{p_{0y}^2 c^2 + E_0^2 + u^2} + C^{te}$$

$$\Rightarrow z = \frac{1}{q\mathbf{E}} \sqrt{p_{0y}^2 c^2 + E_0^2 + (q\mathbf{E}t + p_{0z})^2 c^2} + C^{te}$$

Conditions Initiales



$z = 0$ lorsque $t = 0 \Leftrightarrow$

$$z = \frac{1}{q\mathbf{E}} \left[\sqrt{p_{0y}^2 c^2 + E_0^2 + (q\mathbf{E}t + p_{0z})^2 c^2} - \sqrt{p_{0y}^2 c^2 + E_0^2 + p_{0z}^2 c^2} \right]$$

L'ensemble de ces résultats nous montre que le mouvement de la particule appartient au plan (yOz)

III.1.1 Cas particulier : la quantité de mouvement de la particule est parallèle au champ électrique uniforme et constant

Cette condition s'écrit : $\vec{p}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ p_{0z} = p_0 \end{pmatrix}$

Les résultats précédents se simplifient,
pour la vitesse de la particule :

$$v_x = 0$$

$$v_y = 0$$

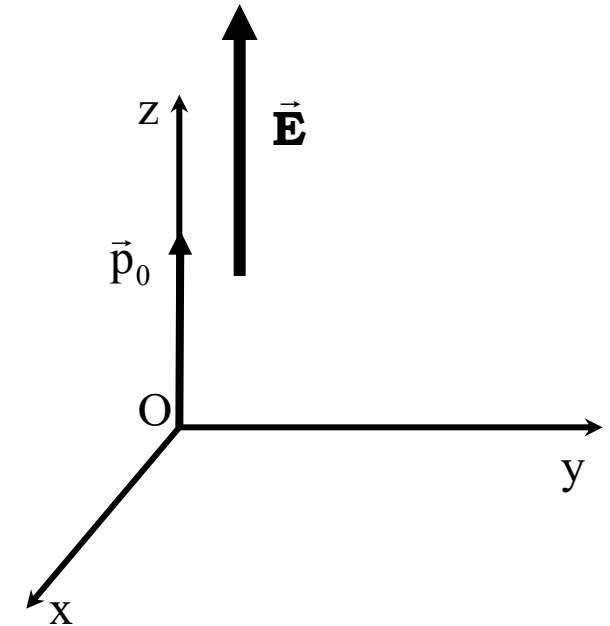
$$v_z = \frac{dz}{dt} = \frac{(q\mathbf{E}t + p_0)c^2}{\sqrt{(q\mathbf{E}t + p_0)^2 c^2 + E_0^2}}$$

et pour le vecteur position de la particule :

$$x = 0$$

$$y = 0$$

$$z = \frac{1}{q\mathbf{E}} \left[\sqrt{E_0^2 + (q\mathbf{E}t + p_0)^2 c^2} - \sqrt{E_0^2 + p_0^2 c^2} \right]$$



Mouvement rectiligne suivant
la direction du champ

III.1.2 Cas particulier : la particule est initialement au repos

Cette condition s'énonce : $\vec{p}_0 = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$

Les résultats précédents se simplifient,
pour la vitesse de la particule :

$$v_x = 0$$

$$v_y = 0$$

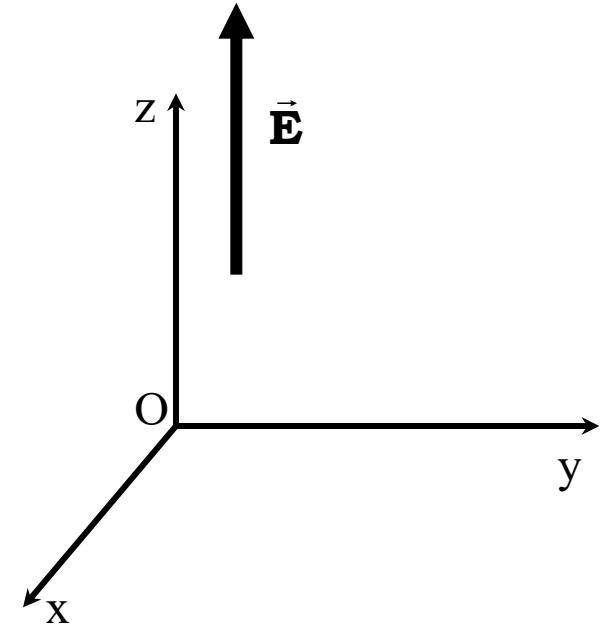
$$v_z = \frac{dz}{dt} = \frac{q \cdot \mathbf{E} \cdot t \cdot c^2}{\sqrt{(q \cdot \mathbf{E} \cdot t)^2 c^2 + E_0^2}}$$

et pour le vecteur position de la particule :

$$x = 0$$

$$y = 0$$

$$z = \frac{1}{q \cdot \mathbf{E}} \left[\sqrt{E_0^2 + (q \cdot \mathbf{E} \cdot t)^2 c^2} - E_0 \right]$$



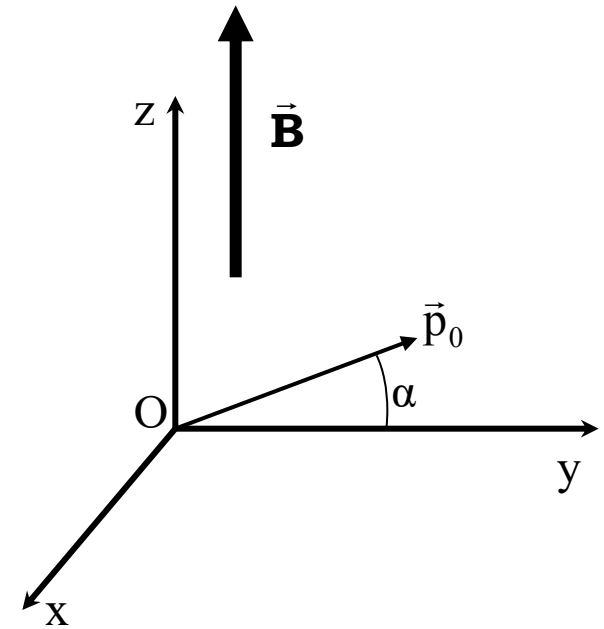
**Mouvement rectiligne suivant
la direction du champ**

III.2 Particules chargées dans un champ magnétique uniforme et constant

Considérons une particule pénétrant à l'origine des temps avec une quantité de mouvement initiale $\vec{p}_0$ dans une région de l'espace où règne un champ $\vec{\mathbf{B}}$ magnétique uniforme et constant.

De plus, l'origine O est confondue avec la particule à l'origine des temps. Le champ magnétique est parallèle à Oz et la quantité de mouvement initiale appartient au plan (yOz).

Dans ce repère, que nous supposons galiléen, la loi fondamentale de la dynamique relativiste s'écrit :



$$\text{RFD} \Rightarrow \begin{cases} \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{f} \\ \frac{d(mc)}{dt} = \frac{\vec{v} \cdot \vec{f}}{c} \Leftrightarrow \frac{dE}{dt} = \vec{v} \cdot \vec{f} \end{cases}$$

$$\vec{f} = q\vec{v} \wedge \vec{\mathbf{B}} = q \begin{vmatrix} v_x & 0 \\ v_y & 0 \\ v_z & \mathbf{B} \end{vmatrix} = q \begin{vmatrix} 0 & \mathbf{B} \cdot v_y \\ -\mathbf{B} \cdot v_x & 0 \end{vmatrix}$$

$$\frac{dE}{dt} = \vec{v} \cdot \vec{f} = \vec{v} \cdot (q\vec{v} \wedge \vec{\mathbf{B}}) = 0$$

Aucune variation d'énergie en présence d'un champ magnétique seul.

La première relation nous donne :

$$\frac{dp_x}{dt} = q \cdot \mathbf{B} \cdot v_y$$

$$\Rightarrow \frac{dp_y}{dt} = -q \cdot \mathbf{B} \cdot v_x$$

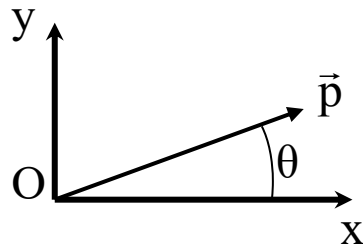
Conditions Initiales

$$\frac{dp_z}{dt} = 0 \quad \longleftrightarrow \quad \frac{dp_z}{dt} = 0 \Leftrightarrow p_z = C^{te} \quad \Rightarrow \quad p_z = p_{0z} = p_0 \cdot \sin \alpha$$

Si l'on considère maintenant les deux premières équations, nous sommes en présence d'un système d'équations différentielles couplées. Ce système peut se résoudre facilement en utilisant un système de coordonnées polaires.

$$\begin{aligned} & \Rightarrow \begin{cases} \frac{dp_x}{dt} = q \cdot \mathbf{B} \cdot v_y \\ \frac{dp_y}{dt} = -q \cdot \mathbf{B} \cdot v_x \end{cases} \xrightarrow[\text{par } m]{\text{Multiplication}} \begin{cases} m \frac{dp_x}{dt} = q \cdot \mathbf{B} \cdot (v_y \cdot m) \\ m \frac{dp_y}{dt} = -q \cdot \mathbf{B} \cdot (v_x \cdot m) \end{cases} \xrightarrow{\quad} \begin{cases} m \frac{dp_x}{dt} = q \cdot \mathbf{B} \cdot p_y \\ m \frac{dp_y}{dt} = -q \cdot \mathbf{B} \cdot p_x \end{cases} \end{aligned}$$

On passe donc en coordonnées polaires :



$$\begin{cases} p_x = P \cos \theta \\ p_y = P \sin \theta \end{cases}$$

$$P = \sqrt{p_x^2 + p_y^2}$$

$$\begin{cases} \frac{dp_x}{dt} = \frac{d}{dt} [P \cos \theta] = \frac{dP}{dt} \cos \theta - P \sin \theta \frac{d\theta}{dt} \\ \frac{dp_y}{dt} = \frac{d}{dt} [P \sin \theta] = \frac{dP}{dt} \sin \theta + P \cos \theta \frac{d\theta}{dt} \end{cases}$$

En identifiant
dans le système
précédent 

$$\begin{cases} m \left[\frac{dP}{dt} \cos \theta - P \sin \theta \frac{d\theta}{dt} \right] = q \cdot \mathbf{B} \cdot P \sin \theta & (1) \\ m \left[\frac{dP}{dt} \sin \theta + P \cos \theta \frac{d\theta}{dt} \right] = -q \cdot \mathbf{B} \cdot P \cos \theta & (2) \end{cases}$$

L'équation (1) permet d'écrire : $(1) \Leftrightarrow m \frac{dP}{dt} \cos \theta = \left(m \frac{d\theta}{dt} + q \cdot \mathbf{B} \right) P \sin \theta$

$$\Rightarrow m \frac{dP}{dt} = \left(m \frac{d\theta}{dt} + q \cdot \mathbf{B} \right) P \cdot \text{tg} \theta \quad (3)$$

En reportant dans l'équation (2) :

$$\begin{aligned} (2) &\Leftrightarrow m \frac{dP}{dt} \text{tg} \theta + m \cdot P \frac{d\theta}{dt} = -q \cdot \mathbf{B} \cdot P \\ &\Rightarrow \left(m \frac{d\theta}{dt} + q \cdot \mathbf{B} \right) \cdot P \cdot \text{tg}^2 \theta + m \cdot P \frac{d\theta}{dt} = -q \cdot \mathbf{B} \cdot P \\ &\Rightarrow q \cdot \mathbf{B} (1 + \text{tg}^2 \theta) + m \cdot \frac{d\theta}{dt} (1 + \text{tg}^2 \theta) = 0 \\ &\Rightarrow (\text{tg}^2 \theta + 1) \left(q \cdot \mathbf{B} + m \frac{d\theta}{dt} \right) = 0 \end{aligned}$$

Or la quantité $(\text{tg}^2 \theta + 1)$ n'est jamais nulle.



$$\left(q \cdot \mathbf{B} + m \cdot \frac{d\theta}{dt} \right) = 0 \Rightarrow m \frac{d\theta}{dt} = -q \cdot \mathbf{B} \quad (4)$$

En utilisant cette nouvelle relation dans l'équation (3) :

La quantité de mouvement initiale est dans le plan (yOz)

$$(3) \Leftrightarrow \left. \begin{aligned} m \frac{d\mathbf{P}}{dt} &= \left(m \frac{d\theta}{dt} + q \cdot \mathbf{B} \right) \mathbf{P} \cdot \mathbf{tg} \theta \\ m \frac{d\theta}{dt} &= -q \cdot \mathbf{B} \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow m \frac{d\mathbf{P}}{dt} = 0 \Leftrightarrow \frac{d\mathbf{P}}{dt} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{P} = \mathbf{C}^{te}$$

Conditions Initiales



$$\mathbf{P} = p_{0y} = p_0 \cos \alpha$$

A l'aide des différentes propriétés de la quantité de mouvement, on peut démontrer que la masse de la particule est indépendante du temps.

En effet, on a :

$$\left. \begin{aligned} p^2 &= \vec{p} \cdot \vec{p} = p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 \\ \text{on sait que :} \\ p_z &= C^{te} = p_{0z} = p_0 \sin \alpha \\ \text{et} \\ P &= C^{te} = \sqrt{p_x^2 + p_y^2} = p_{0y} = p_0 \cos \alpha \end{aligned} \right\} \begin{aligned} p^2 &= p_{0y}^2 + p_{0z}^2 \\ p^2 &= p_0^2 = C^{te} \end{aligned}$$

$$\text{Par ailleurs : } p^2 c^2 = E^2 - E_0^2$$

$$\Leftrightarrow E^2 = p^2 c^2 + E_0^2 = C^{te}$$

$$\Leftrightarrow E = mc^2 \Leftrightarrow m = C^{te}$$

Donc l'équation (4) a une solution évidente :

$$(4) \Leftrightarrow m \frac{d\theta}{dt} = -q \cdot \mathbf{B}$$

$$\Leftrightarrow \frac{d\theta}{dt} = -\frac{q \cdot \mathbf{B}}{m} \Leftrightarrow \theta = -\frac{q \cdot \mathbf{B}}{m} t + C^{te}$$

On fixe la constante d'intégration à l'aide des conditions initiales : A $t = 0 \Leftrightarrow \varphi = \frac{\pi}{2}$

$$\Leftrightarrow \theta = -\frac{q \cdot \mathbf{B}}{m} t + \frac{\pi}{2}$$

Finalement :

$$\begin{cases} p_x = p_0 \cdot \cos \alpha \cdot \cos \left(-\frac{q \cdot \mathbf{B}}{m} t + \frac{\pi}{2} \right) = p_0 \cdot \cos \alpha \cdot \sin \left(\frac{q \cdot \mathbf{B}}{m} t \right) \\ p_y = p_0 \cdot \cos \alpha \cdot \sin \left(-\frac{q \cdot \mathbf{B}}{m} t + \frac{\pi}{2} \right) = p_0 \cdot \cos \alpha \cdot \cos \left(\frac{q \cdot \mathbf{B}}{m} t \right) \\ p_z = p_0 \cdot \sin \alpha \end{cases}$$

Si on calcul le module de la quantité de mouvement, on retombe bien sur la même valeur : $p^2 = p_0^2 = C^{te}$

Calculons maintenant les composantes de la vitesse :

Energie de la particule $\left\{ \begin{array}{l} \frac{\vec{v}}{c} = \frac{\vec{p}c}{E} \\ E^2 = p_0^2 c^2 + E_0^2 \end{array} \right\}$ 

$$\begin{cases} v_x = \frac{p_x c^2}{E} = \frac{p_0 \cdot c^2 \cdot \cos \alpha \cdot \sin \left(\frac{q \cdot \mathbf{B}}{m} t \right)}{\sqrt{p_0^2 c^2 + E_0^2}} \\ v_y = \frac{p_y c^2}{E} = \frac{p_0 \cdot c^2 \cdot \cos \alpha \cdot \cos \left(\frac{q \cdot \mathbf{B}}{m} t \right)}{\sqrt{p_0^2 c^2 + E_0^2}} \\ v_z = \frac{p_z c^2}{E} = \frac{p_0 \cdot c^2 \cdot \sin \alpha}{\sqrt{p_0^2 c^2 + E_0^2}} \end{cases}$$

On en déduit les composantes du vecteur position :

$$\begin{cases} x = \frac{p_0 \cdot c^2 \cdot \cos \alpha}{\sqrt{p_0^2 c^2 + E_0^2}} \int \sin\left(\frac{\mathbf{q} \cdot \mathbf{B}}{m} t\right) = -\frac{p_0 \cdot c^2 \cdot \cos \alpha}{\sqrt{p_0^2 c^2 + E_0^2}} \frac{m}{\mathbf{q} \cdot \mathbf{B}} \cos\left(\frac{\mathbf{q} \cdot \mathbf{B}}{m} t\right) + C_1 \\ y = \frac{p_0 \cdot c^2 \cdot \cos \alpha}{\sqrt{p_0^2 c^2 + E_0^2}} \int \cos\left(\frac{\mathbf{q} \cdot \mathbf{B}}{m} t\right) = \frac{p_0 \cdot c^2 \cdot \cos \alpha}{\sqrt{p_0^2 c^2 + E_0^2}} \frac{m}{\mathbf{q} \cdot \mathbf{B}} \sin\left(\frac{\mathbf{q} \cdot \mathbf{B}}{m} t\right) + C_2 \\ z = \frac{p_0 \cdot c^2 \cdot \sin \alpha}{\sqrt{p_0^2 c^2 + E_0^2}} = \frac{p_0 \cdot c^2 \cdot \sin \alpha}{\sqrt{p_0^2 c^2 + E_0^2}} t + C_3 \end{cases}$$

Les conditions initiales sont :

$$\text{à } t = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$



$$\begin{cases} x = \frac{p_0 \cdot c^2 \cdot \cos \alpha}{\sqrt{p_0^2 c^2 + E_0^2}} \frac{m}{\mathbf{q} \cdot \mathbf{B}} \left[1 - \cos\left(\frac{\mathbf{q} \cdot \mathbf{B}}{m} t\right) \right] \\ y = \frac{p_0 \cdot c^2 \cdot \cos \alpha}{\sqrt{p_0^2 c^2 + E_0^2}} \frac{m}{\mathbf{q} \cdot \mathbf{B}} \sin\left(\frac{\mathbf{q} \cdot \mathbf{B}}{m} t\right) \\ z = \frac{p_0 \cdot c^2 \cdot \sin \alpha}{\sqrt{p_0^2 c^2 + E_0^2}} t \end{cases}$$

Il est facile d'éliminer le temps entre les deux premières équations :

$$\left[x - \frac{p_0 \cdot c^2 \cdot \cos \alpha}{\sqrt{p_0^2 c^2 + E_0^2}} \frac{m}{\mathbf{q} \cdot \mathbf{B}} \right]^2 + y^2 = \left[\frac{p_0 \cdot c^2 \cdot \cos \alpha}{\sqrt{p_0^2 c^2 + E_0^2}} \frac{m}{\mathbf{q} \cdot \mathbf{B}} \right]^2$$

Equation d'un cercle de rayon :
et de centre :

$$\begin{cases} x = R \\ y = 0 \end{cases}$$

$$R = \frac{p_0 \cdot c^2 \cdot \cos \alpha}{\sqrt{p_0^2 c^2 + E_0^2}} \frac{m}{\mathbf{q} \cdot \mathbf{B}}$$

On peut recalculer le rayon en utilisant la relation suivante :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\vec{v}}{c} = \frac{\vec{p}c}{E} &\Leftrightarrow \|\vec{v}\| = \frac{\|\vec{p}\|c^2}{E} \Leftrightarrow v = \frac{pc^2}{E} = \frac{p_0c^2}{\sqrt{p_0^2c^2 + E_0^2}} \\ R &= \frac{p_0 \cdot C^2 \cdot \cos \alpha}{\sqrt{p_0^2 C^2 + E_0^2}} \frac{m}{q \cdot \mathbf{B}} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} R &= \frac{mv}{q \cdot \mathbf{B}} \cos \alpha \\ p &= mv \end{aligned} \left. \right\} R = \frac{p_0}{q \cdot \mathbf{B}} \cos \alpha$$

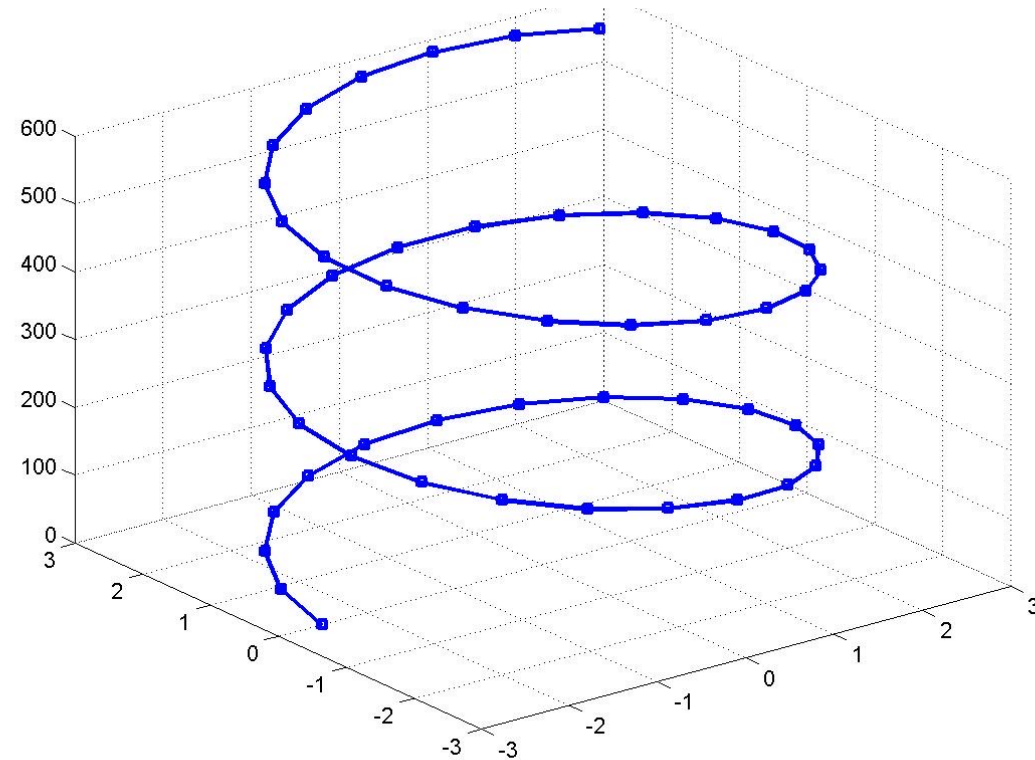
La projection de la trajectoire dans le plan (xOy) est un cercle. La vitesse angulaire de la particule pour décrire le cercle est :

$$\omega = \frac{q \cdot \mathbf{B}}{m} \quad (\text{voir équations du mouvement})$$

La dernière composante de la trajectoire de cette particule, c'est-à-dire z, est équivalent à une translation uniforme.



L'association de ces deux trajectoires forme une hélice.



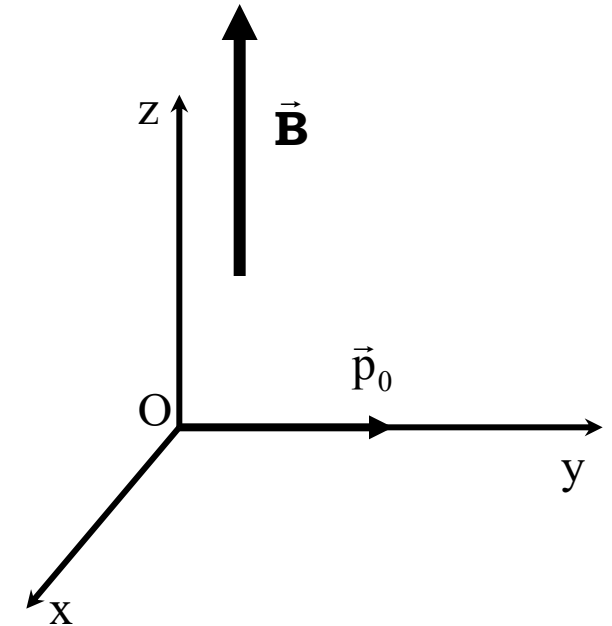
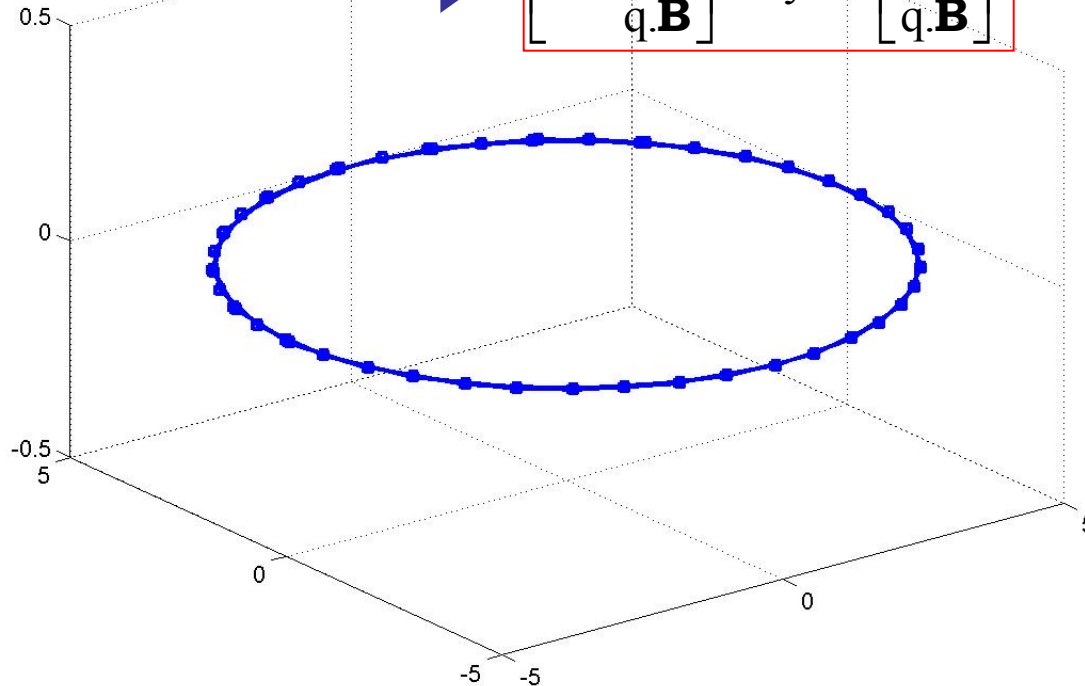
III.2.1 Cas particulier : la quantité de mouvement de la particule est suivant l'axe Oy ($\alpha=0$)


$$\begin{cases} x = \frac{p_0}{q \cdot \mathbf{B}} \left[1 - \cos\left(\frac{q \cdot \mathbf{B}}{m} t\right) \right] \\ y = \frac{p_0}{q \cdot \mathbf{B}} \sin\left(\frac{q \cdot \mathbf{B}}{m} t\right) \\ z = 0 \end{cases}$$

Ou l'équation d'un cercle



$$\left[x - \frac{p_0}{q \cdot \mathbf{B}} \right]^2 + y^2 = \left[\frac{p_0}{q \cdot \mathbf{B}} \right]^2$$

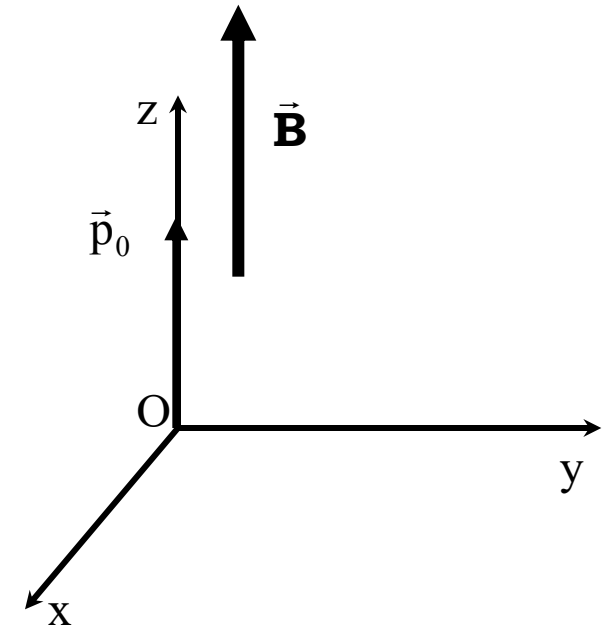
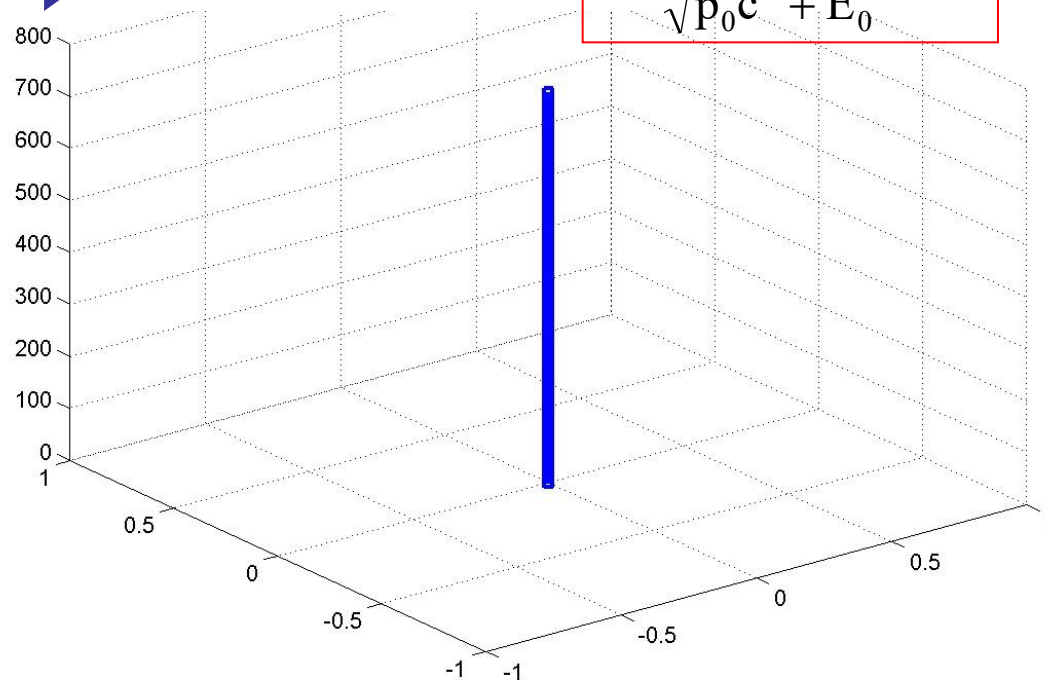


III.2.2 Cas particulier : la quantité de mouvement de la particule est suivant l'axe Oz ($\alpha=\pi/2$)

➡

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = \frac{p_0 \cdot c^2}{\sqrt{p_0^2 c^2 + E_0^2}} t = vt \end{cases}$$

➡ Equation d'une droite :
$$z = \frac{p_0 \cdot c^2}{\sqrt{p_0^2 c^2 + E_0^2}} t = vt$$



IV Les accélérateurs de particules

Les accélérateurs de particules servent à communiquer de l'énergie cinétique à des particules chargées. Leur utilisation a été déterminante dans les avancées de la physique moderne.

Les résultats que nous avons obtenus au chapitre précédent nous ont montré :

❖ La variation d'énergie cinétique d'une particule était uniquement induite par la présence de champs électriques quelconques.

$$\left. \begin{array}{l} \frac{dT}{dt} = \vec{v} \cdot \vec{f} \\ \vec{f} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}) \end{array} \right\} \frac{dT}{dt} = \vec{v} \cdot q \cdot \vec{E} + q \cdot \vec{v} \cdot (\vec{v} \wedge \vec{B}) = q \cdot \vec{v} \cdot \vec{E}$$

**Produit mixte
identiquement nul**

❖ Les champs magnétiques ne communiquent aucune énergie aux particules mais son utilisation permet de modifier leur trajectoire. Nous avons vu que cette trajectoire était proportionnelle à la masse de la particule et inversement proportionnelle au module du champ magnétique. Ceci permet donc soit de faire un tri de particule en fonction de la masse, soit de maintenir les particules dans un volume réduit (mouvement circulaire) même si l'accélération s'effectue sur de très grandes distances.

IV.1 Energie acquise par une particule dans un champ électrique

Considérons dans un référentiels R une particule de charge q . En un point de sa trajectoire où règne un champ électrique $\vec{\mathbf{E}}$, cette particule possède une vitesse $\vec{v}$ et une énergie cinétique T . La variation par unité de temps de cette énergie est :

$$\begin{aligned} dT &= q \cdot \vec{\mathbf{E}} \cdot \vec{v} \cdot dt = q \cdot \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{r} \\ &= -q \cdot \overrightarrow{\text{grad}}(\mathbf{V}) \cdot d\vec{r} = -q d\mathbf{V} \end{aligned}$$

Où $\mathbf{V}$ représentent le potentiel scalaire dont dérive le champ électrique $\vec{\mathbf{E}}$. La variation d'énergie cinétique entre deux points A et B portés respectivement au potentiel V_A et V_B a pour valeur :

$$dT = -q[\mathbf{V}_B - \mathbf{V}_A]$$

Remarque : Pour que cette variation soit positive il faut que la différence de potentiel ($V_B - V_A$) soit positive pour des charge négatives et qu'elle soit négative pour des charges positives.

IV.2 Electron volt

Le joule est une unité d'énergie mal adaptée aux calculs de la physique atomique et particulièrement à ceux de la physique nucléaire. On utilise donc généralement : l'électron volt (eV)

Un électron volt est l'énergie acquise par un électron quand il est soumis à une différence de potentiel de 1 Volt.



$$1\text{eV} = 1.602189 \cdot 10^{-19} \text{ C} \times 1 \text{ V} = 1.602189 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

IV.3 Les accélérateurs électrostatiques

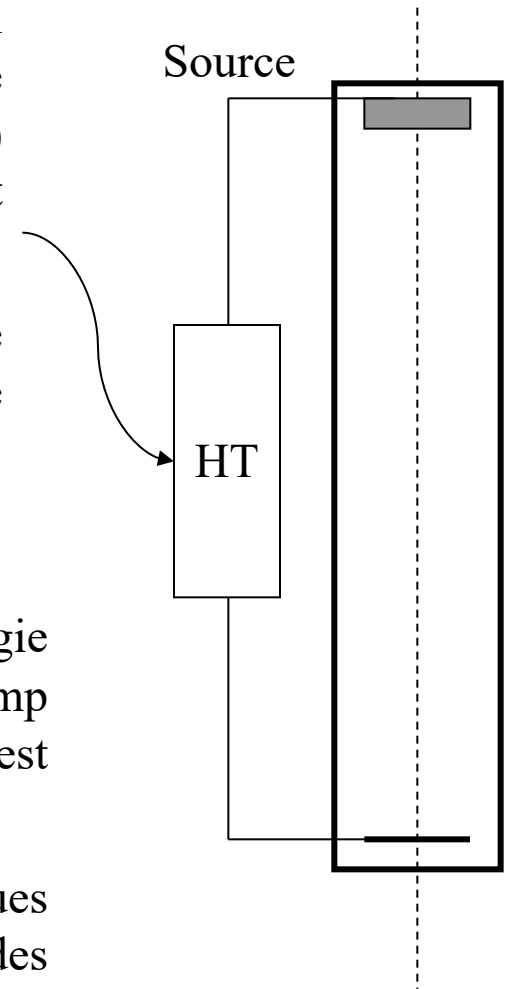
Un générateur de *tension continue* délivre une différence de potentiel que l'on applique aux extrémités d'un tube dans lequel règne un vide poussé. Les particules fournies par une source (d'ions ou d'électrons) sont injectées dans l'axe du dispositif à l'une des extrémités et vont donc être accélérées.

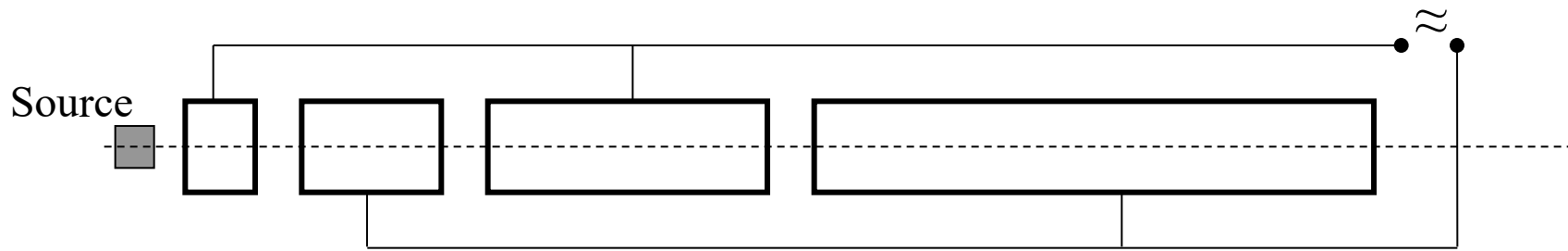
Il est clair que les accélérateurs électrostatique sont limités en énergie par la valeur maximale de la tension appliquée. Les problèmes de décharge entre électrodes sont aussi très critiques.

IV.4 Les accélérateurs linéaires

Les accélérateurs linéaires ont pour principe d'augmenter l'énergie cinétique d'une particule par étape, en utilisant donc un champ électrique alternatif qui n'agit sur la particule que lorsqu'il est accélérateur.

Un accélérateur linéaire est constitué d'une série de tubes cylindriques (i.e. tubes de glissement), de même axe, légèrement séparés les uns des autres et placés dans une enceinte où règne un vide poussé. Les tubes pairs sont reliés à un pôle de la source de tension et les impairs à l'autre.





Si l'on injecte dans l'axe du dispositif des particules chargées (issue par exemple d'un accélérateur électrostatique), elles seront accélérées entre les deux premiers tubes si lors de leur passage le champ est accélérateur (i.e. différence de potentiel adéquate pour la charge de la particule).

Les particules traversent ensuite le second tube avec une vitesse uniforme car elles ne sont alors soumises à aucune force du fait que le tube joue le rôle d'une cage de Faraday. Si de plus lors de leurs passage entre le deuxième et le troisième tube, la phase de la tension alternative est telle que le champ est accélérateur, les particules subissent une nouvelle accélération et ainsi de suite pour les tubes suivants.

Pour que les particules voient toujours un champ accélérateur il faut qu'elles traversent un tube en une demi période de la tension alternative. Leurs vitesses augmentent d'un tube à l'autre, la longueur des différents tubes est donc de plus en plus grande à mesure que l'on s'éloigne de la source.

IV.5 Les accélérateurs circulaires

Les accélérateurs circulaires sont dans leur principe de fonctionnement très semblables aux précédents car ils utilisent aussi des champs électriques alternatifs. La seule différence réside dans l'utilisation d'un champ magnétique uniforme et constant.

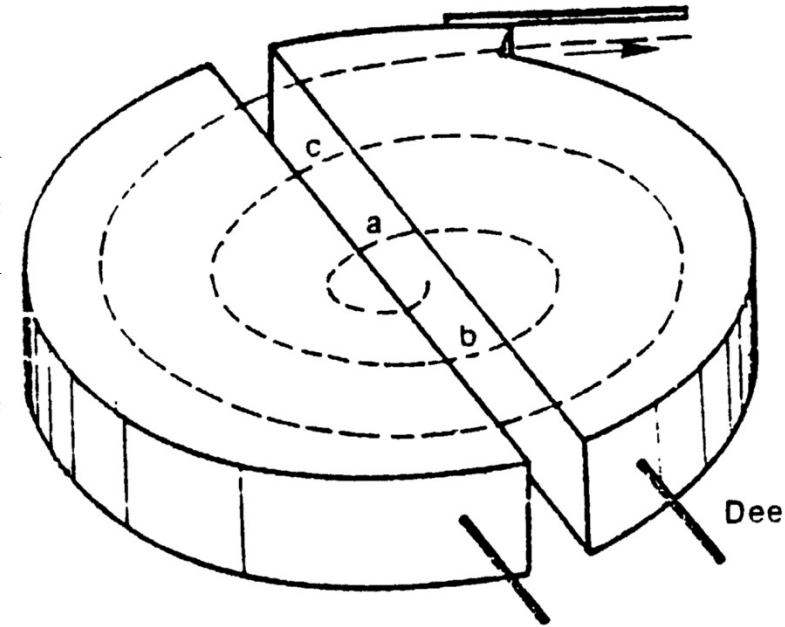
Ces appareils utilisent la propriété qu'ont les particules chargées de décrire des cercles lorsqu'elles sont soumises à une *seule* induction magnétique uniforme et constante. Il faut néanmoins que la vitesse initiale des particules soit perpendiculaire aux lignes de champ.

IV.5.1 Les cyclotrons

Un cyclotron est constitué de deux boîtes plates métalliques semi circulaires (en forme de D) placées dans une enceinte où règne un vide poussé. Cette enceinte est elle-même placée entre les pôles d'un électroaimant fournissant ainsi une induction magnétique uniforme et constante.

Une source de particules est placée au centre du dispositif de façon à émettre un faisceau de particules parallèle aux base des "D" et perpendiculaire au plan des faces en regards. Les "D" sont reliés aux pôles d'un générateur de tension haute fréquence, qui crée donc un champ électrique alternatif.

Les "D" faisant cage de Faraday le champ électrique est donc nul à l'intérieur. Les particules ne sont donc soumises qu'à une induction magnétique *seule* lors de leurs passage dans les "D". Dans ces conditions les particules décrivent des trajectoires circulaires. Pour une particule de charge q , de masse m et de quantité de mouvement p perpendiculaire à B on a :



$$R = \frac{p}{q \cdot B}$$

et

$$\omega = \frac{q \cdot B}{m} \Leftrightarrow \tau = \frac{2\pi m}{q \cdot B}$$

Comme précédemment pour les accélérateurs linéaires, si la fréquence de la tension appliquée aux "D" est correctement choisie les particules verront à chaque changement de "D" un champ électrique accélérateur.

Si on désigne par V la différence de potentiel entre les deux "D", à chaque passage chaque particule acquiert : $T = qV$

Pour extraire les particules de l'accélérateur, un système de déviation électrostatique permet alors de les dévier vers l'extérieur des "D". La dernière trajectoire décrite par les particules a un rayon R_f et une énergie cinétique finale T_f , on peut écrire :

$$R_f = \frac{p_f}{q \cdot B}$$

$$\left. \begin{array}{l} T_f = E_f - E_0 \\ E_f^2 = E_0^2 + p_f^2 c^2 \end{array} \right\} \Rightarrow T_f = \sqrt{E_0^2 + p_f^2 c^2} - E_0 \Leftrightarrow T_f = E_0 \left[\sqrt{1 + \left(\frac{q \cdot B \cdot R_f \cdot c}{E_0} \right)^2} - 1 \right]$$

Remarque: Le bon fonctionnement d'un cyclotron suppose l'invariance de la masse m de la particule or m varie avec la vitesse de la particule donc avec l'énergie acquise par la particule. Donc dans la pratique la fréquence du champ électrique ne sera plus en phase. Les cyclotrons ne peuvent être utilisés pour accélérer des protons au delà de 20 MeV ou des particules α au delà de 40 MeV.

IV.5.2 Les synchrocyclotrons

Le principe de fonctionnement de ces dispositifs est très voisin de celui des précédents. Il s'agit en fait de cyclotrons dans lesquels on fait varier la fréquence du champ accélérateur pour maintenir le synchronisme de la période de rotation de la particule avec celle de la tension accélératrice. Donc l'accélération n'est plus continue mais cyclique, donc le faisceau d'un synchrocyclotron est pulsé.

IV.5.3 Les synchrotrons

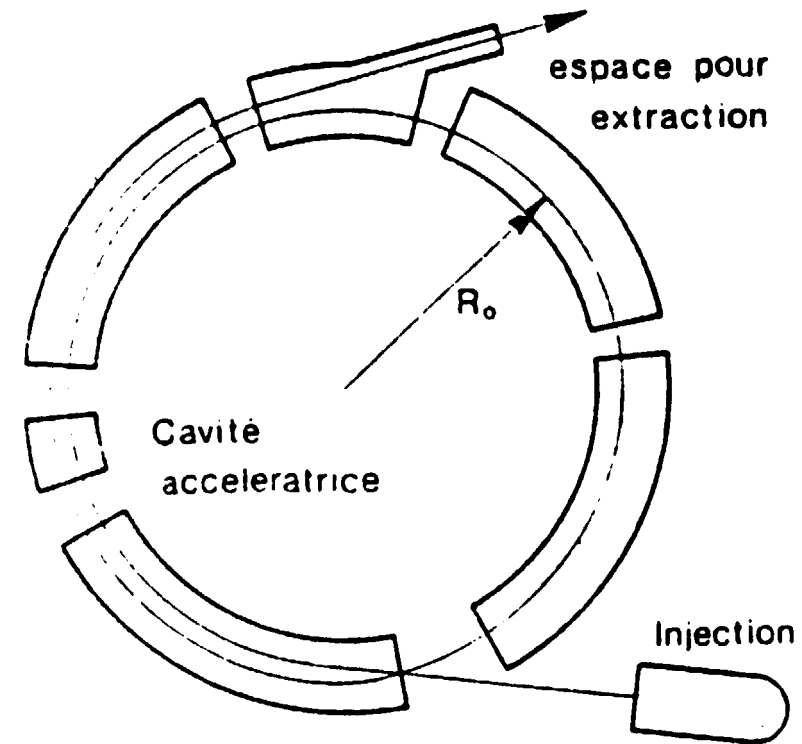
Dans ces dispositifs les particules décrivent toujours la même orbite circulaire. Il n'est plus nécessaire alors que le champ magnétique soit appliqué sur toute la surface mais juste au voisinage immédiat de la chambre à vide en forme de tore. Ceci diminue fortement les problèmes de réalisation de gros et fort électroaimant.

Le rayon de la trajectoire étant constant impose une augmentation de l'induction magnétique au cours de l'accélération. La fréquence du champ électrique accélérateur peut être localiser en un ou plusieurs points de la trajectoire, elle doit également être ajustée tout au long de l'accélération.

Le faisceau d'un synchrotron est aussi un faisceau pulsé

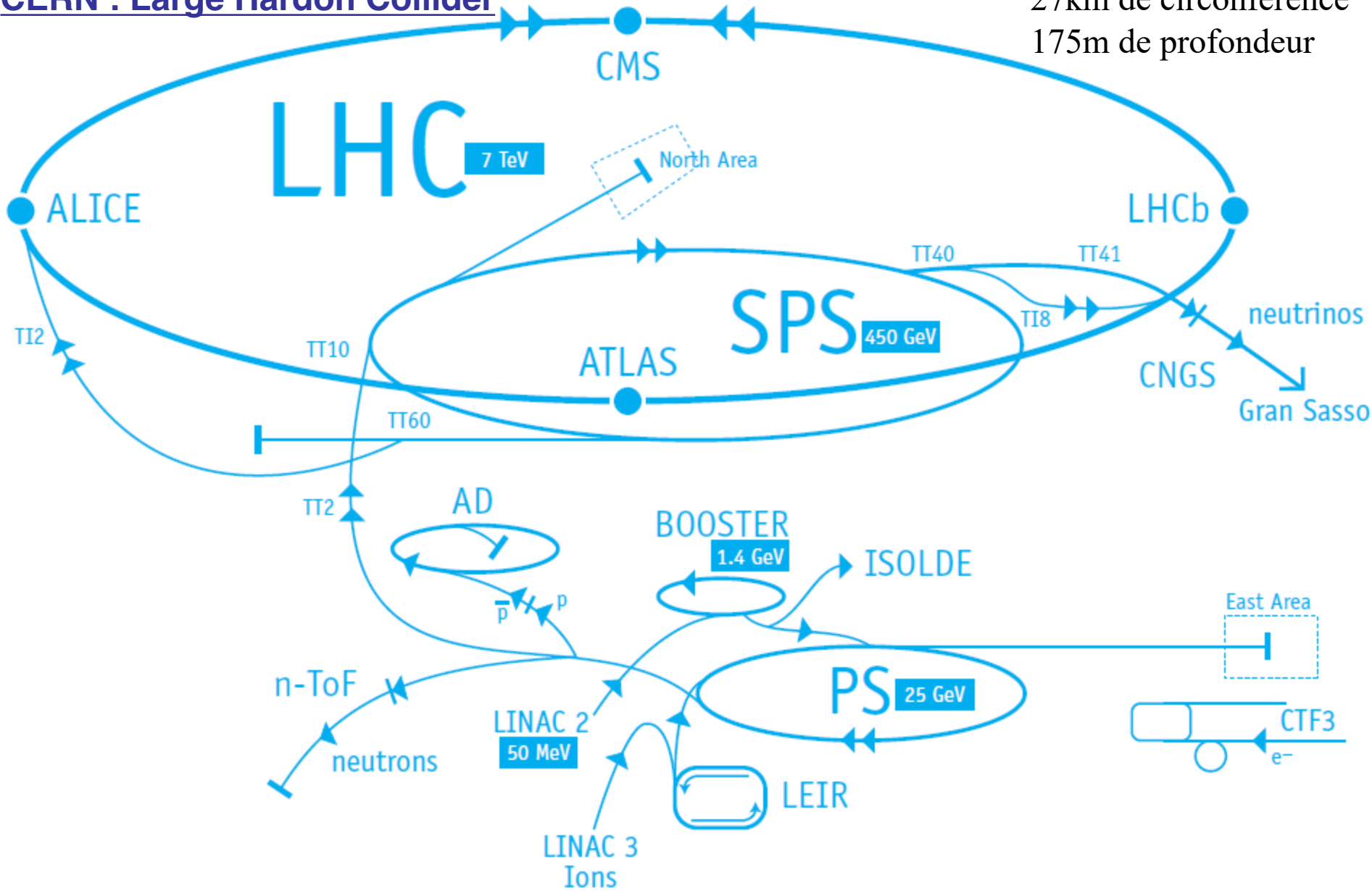
$$R_o = \frac{p}{q \cdot B}$$

$$\tau = \frac{2\pi m}{q \cdot B}$$



CERN : Large Haddon Collider

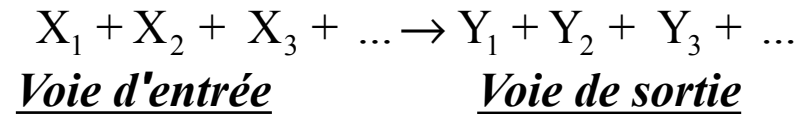
27km de circonférence
175m de profondeur



V Collision de particules

V.1 Définition

D'une façon générale, une collision est le passage, sous l'action de forces, d'un certain système de configuration de particules vers un autre :



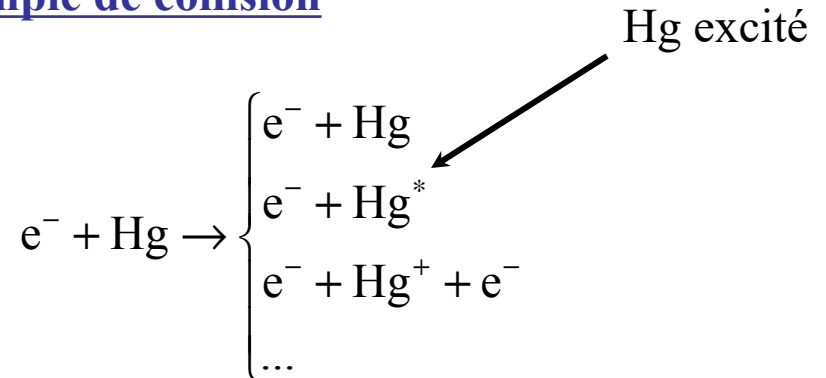
Les X_i et Y_i représentent des particules.

Le système initial ne comprend généralement que deux composants (la cible et le projectile).

Les interactions mises en jeu au cours d'une collision peuvent être de nature très différentes. On peut donner un exemple de classification des différentes collisions :

- Les collisions mécaniques
- Les réactions chimiques
- Les réactions atomiques
- Les réactions nucléaires
- ...

Exemple de collision



V.2 Lois de conservation

De nombreuses lois de conservation doivent être satisfaites au cours d'un processus de collision. Les unes résultent de certains **principes fondamentaux de la physique**, principes qui imposent la conservation de certaines grandeurs physiques au cours de toute transformation d'un système isolé, donc en particulier lors d'une collision. On peut en effet considérer que les constituants d'une collision forment un système isolé car les forces extérieures au système, les forces de pesanteur par exemple, sont négligeables devant les forces responsables de la collision.

D'autres lois de conservation sont liées à la **nature même des interactions** mises en jeu au cours de la collision.

Les principes fondamentaux de la physique imposent :

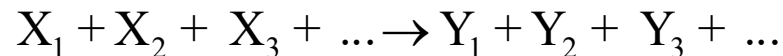
- Conservation de la charge électrique totale. La somme des charges électriques des particules de la voie d'entrée est égale à la somme de celles de la voie de sortie.
- Conservation de l'énergie totale, somme des énergies cinétique et des énergies de masse.
- Conservation de la quantité de mouvement totale.
- Conservation du moment angulaire.

Pour information nous donnons juste quelques lois de conservation liées à la nature des interactions :

- Conservation du nombre de baryons.
- Conservation du nombre de leptons.
- ...

V.3 Bilan d'énergie (ou chaleur de réaction)

Considérons la collision :



La conservation de l'énergie totale nous donne :

$$E_e = E_s$$

avec E_e et E_s l'énergie totale du système dans la voie d'entrée et dans la voies de sortie.

Pour calculer l'énergie totale de la voie d'entrée en fonction de l'énergie de ses constituants, nous avons vu précédemment que cela n'était possible que pour des systèmes isolé (c'est le cas des collisions) et si les constituants sont sans interaction mutuelle.

Pour satisfaire cette dernière contrainte, on se place dans les zones asymptotiques des voies d'entrée ou de sortie, c'est-à-dire dans le cas où les particules de la voie d'entrée ou de sortie sont très éloignées les unes des autres.

On peut donc écrire :

$$\text{Pour la voie d'entrée} \quad E_e = E_{X_1} + E_{X_2} + E_{X_3} + \dots = T_{X_1} + E_{0X_1} + T_{X_2} + E_{0X_2} + T_{X_3} + E_{0X_3} + \dots$$

$$\text{Pour la voie de sortie} \quad E_s = E_{Y_1} + E_{Y_2} + E_{Y_3} + \dots = T_{Y_1} + E_{0Y_1} + T_{Y_2} + E_{0Y_2} + T_{Y_3} + E_{0Y_3} + \dots$$

$$E_e = E_s \quad \longrightarrow \quad T_{X_1} + E_{0X_1} + T_{X_2} + E_{0X_2} + T_{X_3} + E_{0X_3} + \dots = T_{Y_1} + E_{0Y_1} + T_{Y_2} + E_{0Y_2} + T_{Y_3} + E_{0Y_3} + \dots$$

$$T_{X_1} + M_{0X_1}c^2 + T_{X_2} + M_{0X_2}c^2 + T_{X_3} + M_{0X_3}c^2 + \dots = T_{Y_1} + M_{0Y_1}c^2 + T_{Y_2} + M_{0Y_2}c^2 + T_{Y_3} + M_{0Y_3}c^2 + \dots$$

On appelle bilan d'énergie de la réaction (ou chaleur de réaction) la quantité :

$$Q = [(T_{Y_1} + T_{Y_2} + T_{Y_3} + \dots) - (T_{X_1} + T_{X_2} + T_{X_3} + \dots)] = [(M_{0X_1} + M_{0X_2} + M_{0X_3} + \dots) - (M_{0Y_1} + M_{0Y_2} + M_{0Y_3} + \dots)]c^2$$

$$\longrightarrow \quad Q = [T_s - T_e] = [M_{0e} - M_{0s}]c^2$$

- Remarques :** ✓ Q s'exprime en fonction des masses propres des particules, c'est donc un invariant dans tout changement de repère galiléen.
- ✓ Les caractéristiques cinématiques (énergies cinétique, quantité de mouvement, ...) des constituants sont toujours mesurées dans des zones asymptotiques. Les instruments de mesures ont en effet des dimensions tellement grandes comparativement aux dimensions des volumes dans lesquels se manifestent les collisions. On peut donc toujours considérer les particules sans interaction mutuelles.
- ✓ Le terme particule est à prendre dans son sens le plus général. Il peut donc décrire un édifice complexe (atome, molécule, ion, ...) qui ne se réduit pas forcément à une particule élémentaire. Cette structure complexe peut se trouver dans un état excité d'énergie E^* . Sa masse propre est alors :

$$M_0 = m_0 + \frac{E^*}{c^2}$$

- ✓ D'après la formule de la chaleur de réaction, on a donc deux méthodes de mesure :
- A partir des énergies cinétiques
 - A partir des masses propres

V.4 Différents types de collisions et de diffusions

V.4.1 Les collisions élastiques

Une collision élastique est une collision dont le bilan d'énergie est nul.

$$Q = [T_s - T_e] = [M_{0e} - M_{0s}]c^2 \quad \longrightarrow \quad Q = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} T_e = T_s & \text{Conservation de l'énergie cinétique totale} \\ M_{0e} = M_{0s} & \text{Conservation des masses propres} \end{cases}$$

V.4.2 Les diffusions élastiques

Une diffusion élastique est une collision élastique dans laquelle les constituants de la voie d'entrée se retrouvent identiquement dans la voie de sortie. Donc avec les mêmes masses propres. Seules les énergies cinétiques individuelles ont été modifiées.

V.4.3 Les collisions inélastiques

Ce sont des collisions pour lesquelles la chaleur de réaction Q n'est pas nulle. Il n'y a plus ni conservation de l'énergie cinétiques, ni de la masse propre. On distingue :

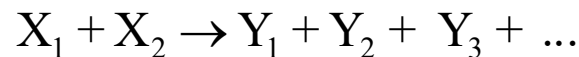
- ❖ Les collisions exoénergétiques pour lesquelles on a $Q > 0$. Elles donnent de l'énergie au milieu ambiant.
- ❖ Les collisions endoénergétiques pour lesquelles on a $Q < 0$. Elles prennent de l'énergie au milieu ambiant.

V.4.4 Les diffusions inélastiques

Dans les diffusions inélastiques les constituants de la voie d'entrée se retrouvent dans celle de sortie, mais cette fois la masse propre d'un entre eux au moins a été modifiée. Autrement dit l'énergie d'excitation d'un des constituants au moins a changé.

V.5 Energie de seuil d'une collision

Considérons uniquement les processus à deux corps dans la voie d'entrée. Cette configuration est la plus courante car il est très difficile de faire interagir simultanément plus de deux particules.



Le bilan d'énergie de la réaction est : $Q = T_s - T_e$

- ✓ si $Q > 0$: La réaction est possible pour toutes les valeurs de T_e
- ✓ si $Q < 0$: La réaction n'est possible que pour certaines valeurs de T_e . Dans ce cas il y a donc une énergie minimale ou **énergie de seuil** afin que la réaction se déclenche.

Définition

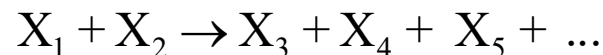
L'énergie de seuil est, dans un référentiel donné, l'énergie cinétique totale minimale que doivent posséder les particules de la voie d'entrée pour qu'un processus de collision endoénergétique puisse avoir lieu.

Théorème

Dans le référentiel du centre de masse l'énergie de seuil est égale à l'opposé de la chaleur de réaction.

Calcul de l'énergie de seuil

D'après le théorème précédent il est facile de calculer l'énergie de seuil, néanmoins dans la pratique on ne se trouve jamais dans le référentiel du centre de masse. Regardons comment peut s'écrire l'énergie de seuil dans le référentiel du laboratoire. Désignons par P_i , E_i et E_{0i} les quantités de mouvement, les énergies et les énergies propres dans le ref du labo (relatif à X_i) des différentes particules.



X_2 est la cible, donc immobile dans le ref du labo : $P_2=0$ et $E_2=E_{02}$

Lois de conservations
dans le ref. du labo.



$$\begin{cases} P_1 = P_3 + P_4 + P_5 + \dots \\ E_1 + E_{02} = E_3 + E_4 + E_5 + \dots \end{cases}$$

Dans le référentiel du centre de masse de la voie d'entrée on a :



$$\begin{cases} \mathbf{P}^{\bullet}_1 + \mathbf{P}^{\bullet}_2 = 0 \\ \mathbf{P}^{\bullet}_1 + \mathbf{P}^{\bullet}_2 = \mathbf{P}^{\bullet}_3 + \mathbf{P}^{\bullet}_4 + \mathbf{P}^{\bullet}_5 + \dots \\ E^{\bullet}_1 + E^{\bullet}_2 = E^{\bullet}_3 + E^{\bullet}_4 + E^{\bullet}_5 + \dots \end{cases}$$

On peut donc écrire le quadrivecteur quantité de mouvement totale de la voie d'entrée :

référentiel du laboratoire



$$\tilde{\mathbf{P}} = \left(\tilde{\mathbf{P}}_1, \frac{E_1 + E_{02}}{c} \right)$$

référentiel du centre de masse de la voie d'entrée



$$\tilde{\mathbf{P}}^{\bullet} = \left(\vec{0}, \frac{E^{\bullet}_1 + E^{\bullet}_2}{c} \right)$$

En utilisant les propriétés du produit scalaire on peut écrire :

$$(\tilde{\mathbf{P}})^2 = (\tilde{\mathbf{P}}^{\bullet})^2 \Leftrightarrow P_1^2 - \left[\frac{E_1 + E_{02}}{c} \right]^2 = - \left[\frac{E^{\bullet}_1 + E^{\bullet}_2}{c} \right]^2$$

$$(E_1 + E_{02})^2 - P_1^2 c^2 = (E^{\bullet}_1 + E^{\bullet}_2)^2$$

ou encore

$$(E_1 + E_{02})^2 - P_1^2 c^2 = (E^{\bullet}_3 + E^{\bullet}_4 + E^{\bullet}_5 + \dots)^2$$

On peut appliquer la relation $P^2 c^2 = E^2 - E_0^2$ à la particule 1 : $P_1^2 c^2 = E_1^2 - E_{01}^2$

Energie cinétique de la particule 1



$$T_1 = \frac{(E^{\bullet}_3 + E^{\bullet}_4 + E^{\bullet}_5 + \dots)^2 - (E_{01} + E_{02})^2}{2E_{02}}$$

Si on se place à l'énergie de seuil les particules de la voie de sorties sont émises avec une vitesse nulle ou une quantité de mouvement nulle :

$$\begin{aligned} \Rightarrow T_1 = T_{1\text{seuil}} &\Leftrightarrow P_3^\bullet = P_4^\bullet = P_5^\bullet = \dots = 0 \\ &\Rightarrow E_3^\bullet = E_{03} ; E_4^\bullet = E_{04} \dots \end{aligned}$$

$$T_{1\text{seuil}} = \frac{(E_{03} + E_{04} + E_{05} + \dots)^2 - (E_{01} + E_{02})^2}{2E_{02}}$$

On pourrait aussi exprimer l'énergie de seuil à l'aide de la chaleur de réaction :

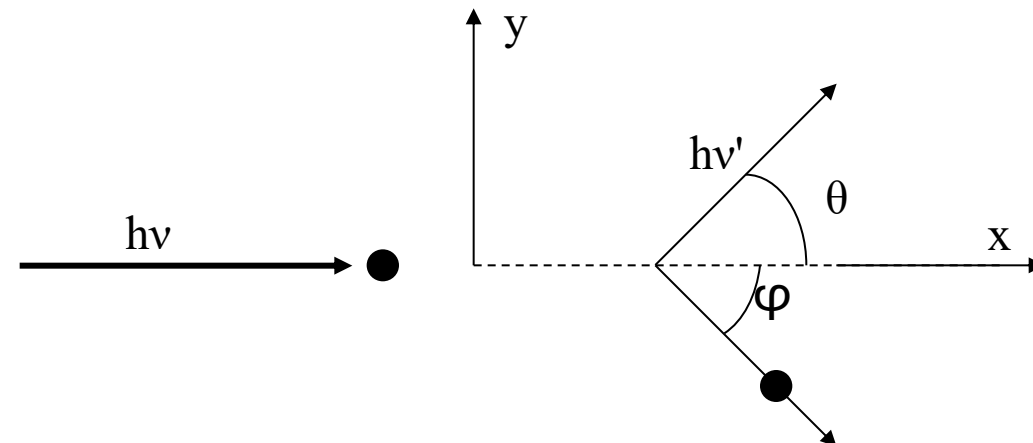
$$T_{1\text{seuil}} \approx -Q \frac{M_{01} + M_{02}}{M_{02}}$$

Ces formules ne sont valables que pour une collision avec deux particules dans la voie d'entrée et la particule cible est la n° 2

V.6 Effet Compton

L'effet Compton est la diffusion d'un photon de haute énergie par un électron initialement immobile.

On supposera que les trajectoires finales de l'électron et du photon restent dans le plan Oxy.



Nous allons comme précédemment écrire la conservation du quadrivecteur quantité de mouvement total avant et après diffusion :

Lois de conservations
dans le ref. du labo.



$$\tilde{\mathbf{P}}_{\text{hv}} + \tilde{\mathbf{P}}_{\text{é}} = \tilde{\mathbf{P}}'_{\text{hv}'} + \tilde{\mathbf{P}}'_{\text{é}}$$

Avant collision

$$\tilde{\mathbf{P}}_{\text{hv}} = \begin{vmatrix} \frac{h\nu}{c} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{h\nu}{c} \end{vmatrix} \quad \tilde{\mathbf{P}}_{\text{é}} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{E_0}{c} = m_0 c \end{vmatrix}$$

Après collision

$$\tilde{\mathbf{P}}'_{\text{hv}'} = \begin{vmatrix} \frac{h\nu'}{c} \cos \theta \\ \frac{h\nu'}{c} \sin \theta \\ 0 \\ \frac{h\nu'}{c} \end{vmatrix} \quad \tilde{\mathbf{P}}'_{\text{é}} = \begin{vmatrix} p \cdot \cos \varphi \\ p \cdot \sin \varphi \\ 0 \\ \frac{E}{c} = mc \end{vmatrix}$$



$$\tilde{\mathbf{P}}_{\text{T}} = \tilde{\mathbf{P}}_{\text{hv}} + \tilde{\mathbf{P}}_{\text{é}} = \begin{vmatrix} \frac{h\nu}{c} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{h\nu + E_0}{c} = \frac{h\nu + m_0 c^2}{c} \end{vmatrix}$$



$$\tilde{\mathbf{P}}'_{\text{T}} = \tilde{\mathbf{P}}'_{\text{hv}'} + \tilde{\mathbf{P}}'_{\text{é}} = \begin{vmatrix} \frac{h\nu'}{c} \cos \theta + p \cdot \cos \varphi \\ \frac{h\nu'}{c} \sin \theta + p \cdot \sin \varphi \\ 0 \\ \frac{h\nu' + E}{c} = \frac{h\nu' + mc^2}{c} \end{vmatrix}$$

Lois de conservations
dans le ref. du labo.



$$\begin{pmatrix} \frac{h\nu}{c} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{h\nu + E_0}{c} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{h\nu'}{c} \cos \theta + p \cdot \cos \varphi \\ \frac{h\nu'}{c} \sin \theta + p \cdot \sin \varphi \\ 0 \\ \frac{h\nu' + E}{c} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{h\nu}{c} = \frac{h\nu'}{c} \cos \theta + p \cdot \cos \varphi & (1) \\ 0 = \frac{h\nu'}{c} \sin \theta + p \cdot \sin \varphi & (2) \\ \frac{h\nu + E_0}{c} = \frac{h\nu' + E}{c} & (3) \end{cases}$$

D'après les équations (1) et (2) : $p^2 = (p \cdot \cos \varphi)^2 + (p \cdot \sin \varphi)^2 = \left(\frac{h\nu}{c} - \frac{h\nu'}{c} \cos \theta \right)^2 + \left(\frac{h\nu'}{c} \sin \theta \right)^2$

$$= \left(\frac{h\nu}{c} \right)^2 - 2 \cdot \frac{h\nu}{c} \frac{h\nu'}{c} \cos \theta + \left(\frac{h\nu'}{c} \cos \theta \right)^2 + \left(\frac{h\nu'}{c} \sin \theta \right)^2$$

$$p^2 c^2 = h^2 (\nu^2 + \nu'^2 - 2\nu\nu' \cos \theta) \quad (4)$$

D'après le chapitre 2 on a la relation suivante : $E^2 - c^2 p^2 = E_0^2$ avec $E_0 = m_0 c^2$

$$\left. \begin{array}{l} E^2 - c^2 p^2 = E_0^2 \\ E_0 = m_0 c^2 \\ c^2 p^2 = h^2 (\nu^2 + \nu'^2 - 2\nu\nu' \cos \theta) \\ (3) \Rightarrow h\nu + E_0 = h\nu' + E \end{array} \right\} \Rightarrow (h\nu + m_0 c^2 - h\nu')^2 - h^2 (\nu^2 + \nu'^2 - 2\nu\nu' \cos \theta) = (m_0 c^2)^2$$

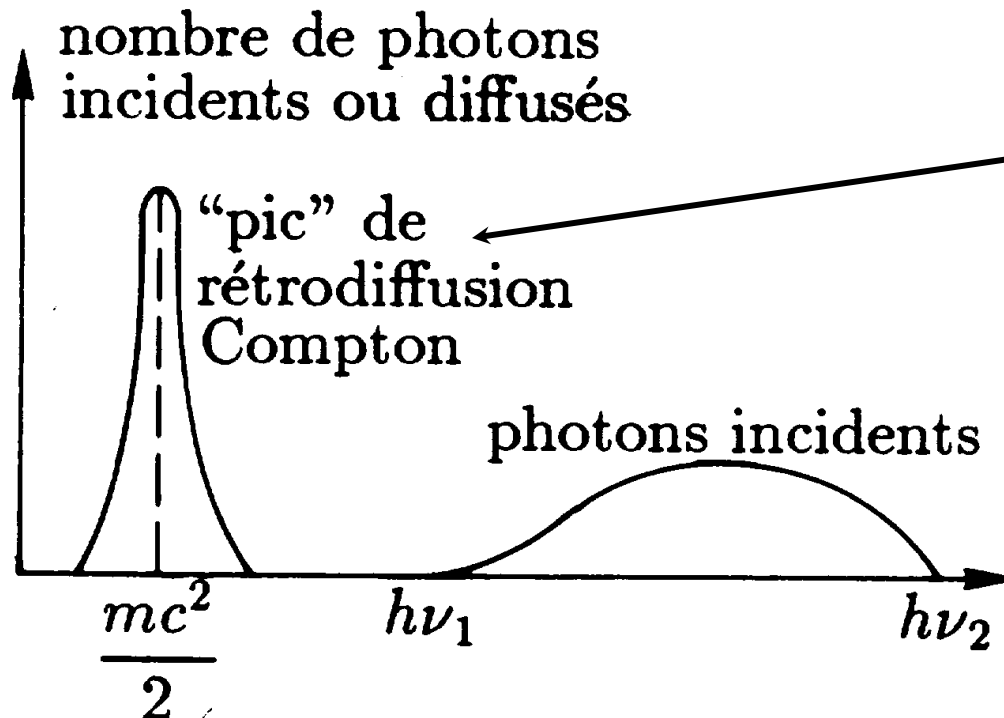
$$h\nu' = \frac{h\nu}{1 + \frac{h\nu}{E_0} (1 - \cos \theta)}$$

L'expression précédente nous montre que $h\nu > h\nu'$. Cette relation était prévisible dans le sens où le photon incident cède de l'énergie à l'électron pour le mettre en mouvement.

Pour $h\nu \gg E_0$, la relation précédente devient :

$$h\nu' = \frac{E_0}{(1 - \cos \theta)}$$

L'énergie minimum des photon détectés sera donc : $h\nu' = \frac{E_0}{2}$



Ce pic est appelé "pic de rétrodiffusion" car $\theta = 180^\circ$