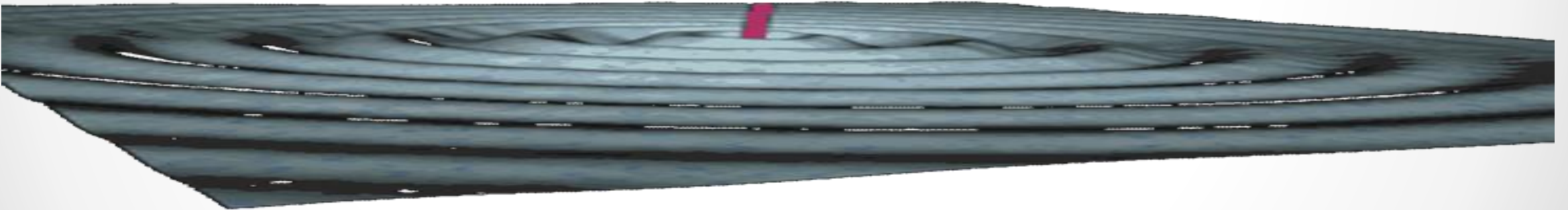


Ondes et propagation

Jean-Philippe Colombier



Contact: jean.philippe.colombier@univ-st-etienne.fr

A) Introduction à la Physique des Ondes

Cours Magistraux	15 h
Travaux Dirigés	15 h
Colles	3/4 h
Total U.E.	30 h

PRÉ-REQUIS:

- Mécanique du point [S1]
- Electrocinétique[S1-S2]
- Mathématiques [S1-S2]

OBJECTIFS

- Compréhension du phénomène
- Types d'ondes et solutions
- Energie et cond aux limites

PLAN DU COURS MAGISTRAL

A INTRODUCTION À LA PHYSIQUE DES ONDES

- I. Généralités sur les phénomènes de propagation*
- II. Définition du phénomène ondulatoire*
- III. Identification et propriétés d'une onde*
- IV. Représentation et équation d'ondes*

B EXEMPLES DE PHÉNOMÈNES DE PROPAGATION

- I. Ondes dans un câble coaxial*
- II. Ondes acoustiques dans les fluides*
- III. Ondes sur une corde vibrante*
- IV. Ondes électromagnétiques dans le vide*

C ONDES PROGRESSIVES ET STATIONNAIRES

- I. Conditions aux limites*
- II. Modes propres et résonances*
- III. Transport d'énergie par une onde plane progressive*

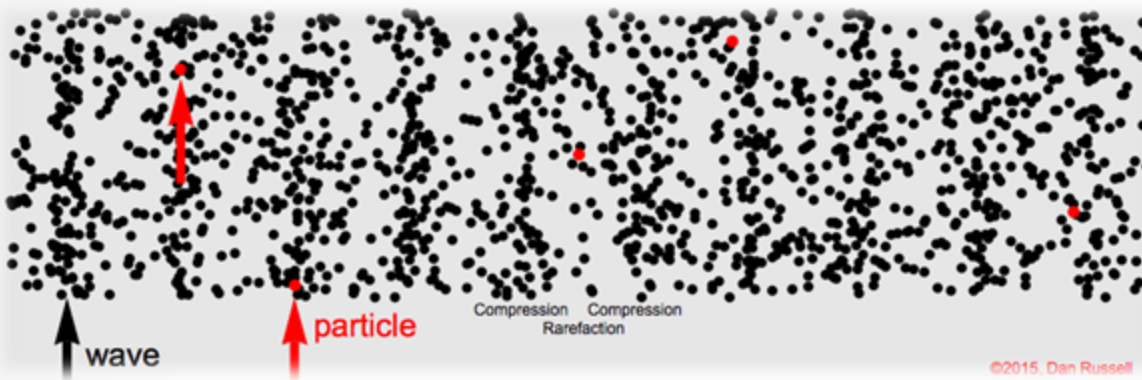
D PROPAGATION DES ONDES LUMINEUSES

- I. Maxwell dans le vide*
- II. Conservation de l'énergie*
- III. Interfaces*

1^{ers} exemples d'ondes

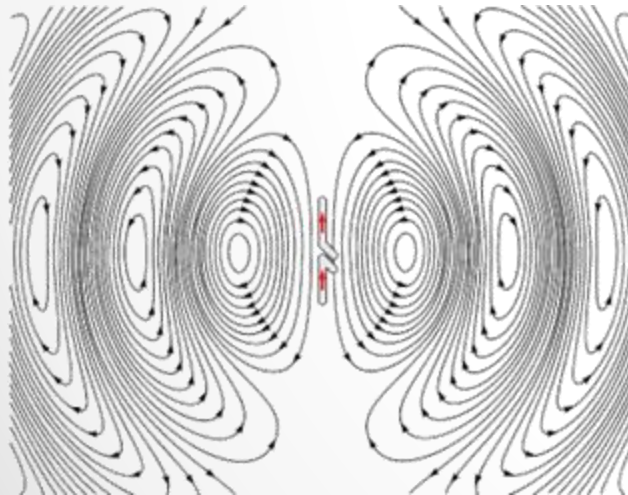
I - Généralités sur les phénomènes de propagation

Le comportement ondulatoire avec ou sans support matériel



Onde acoustique
Mouvement collectif
 $\neq$
individuel

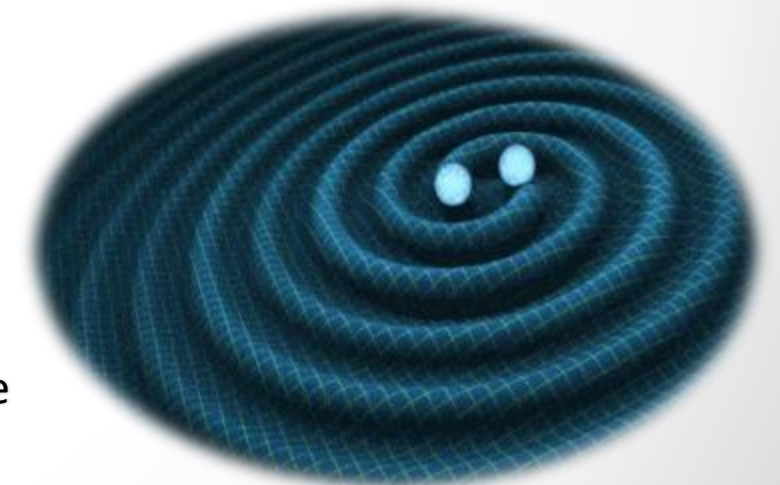
AVEC



Onde électromagnétique
Emission de champ
électromagnétique par un
dipôle (Antenne)

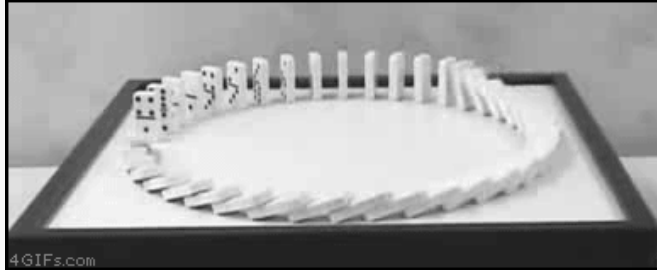
SANS

Onde gravitationnelle
Oscillation de la courbure
espace-temps

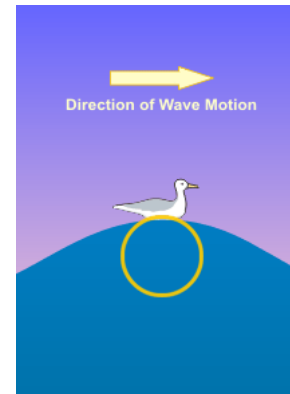


Phénomène de propagation

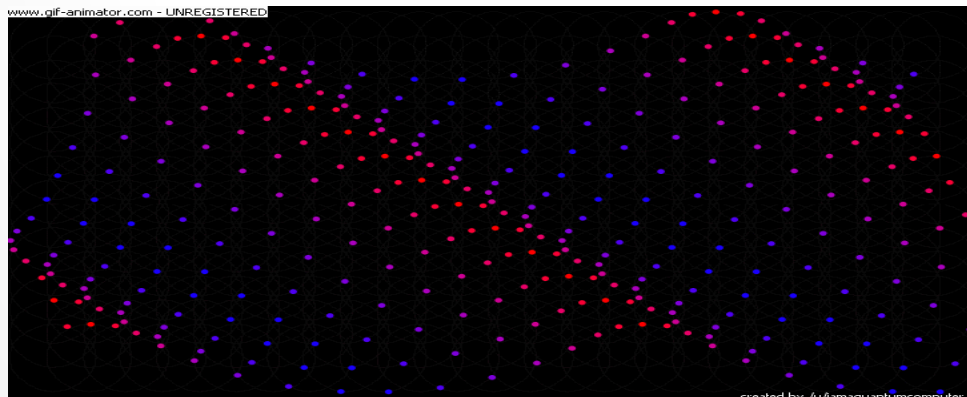
Ondes mécaniques - les grandes généralités



Chaque élément reste à sa place



La mouette le sait...



Pour un milieu matériel, l'intuition soulève la question des interactions à courte portée (répulsion/attraction locale) par rapport aux observations longues portées (période)

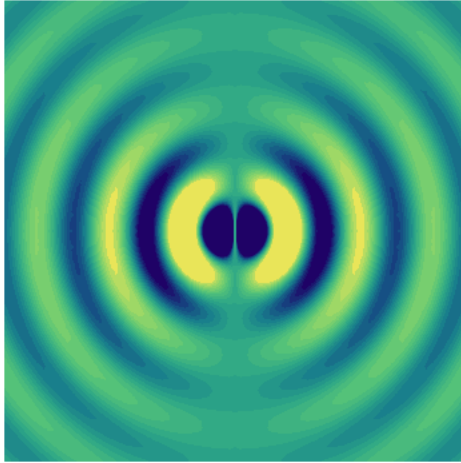
Qu'est-ce qu'une onde ?

II – Définition du phénomène ondulatoire

- **Ma grand mère** = *Un mot qu'on dit quand est-ce qu'on veut parler de trucs qui bougent, qu'on voit pas toujours et qui se répètent un peu quand même, hein...*
 - **Ingénieur** = *propagation d'une perturbation produisant sur son passage une variation réversible des propriétés physiques locales.*
 - **Mathématicien** = *somme (finie ou non) de fonctions sinusoïdales réelles ou complexes, chacune caractérisées par une fréquence et une amplitude.*
 - **Physicien** = *phénomène de propagation ordonnée d'énergie, sans transport de matière.*
-

Les types d'onde

III – Identification et propriétés d'une onde:

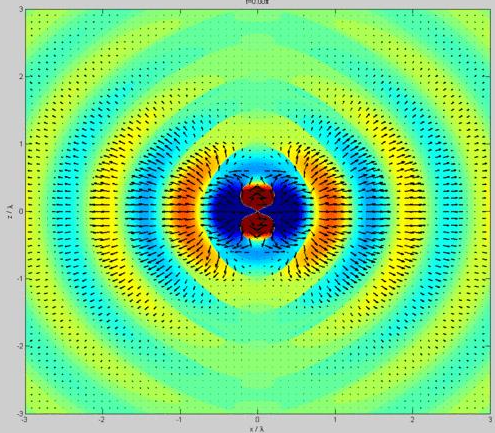


1. Ondes scalaires:

- Caractérisées par leur magnitude qui est un **scalaire** (par exemple **l'amplitude d'oscillation** autour d'un point)
- **Une direction** (comme un vecteur et non plus un scalaire)
- Simples à traiter par le calcul
- *Exemple: propagation d'une onde élastique dans un milieu décrit par des relations scalaires (Fluide ou gaz)*

2. Ondes vectorielles:

- La grandeur propagée est un **vecteur**
- La « **polarisation** » précise l'évolution temporelle de l'orientation de cette grandeur vectorielle dans le plan perpendiculaire à la direction de propagation
- L'équation d'onde a pour solution un **champ de vecteurs**
- *Exemple: Les champs électromagnétiques*

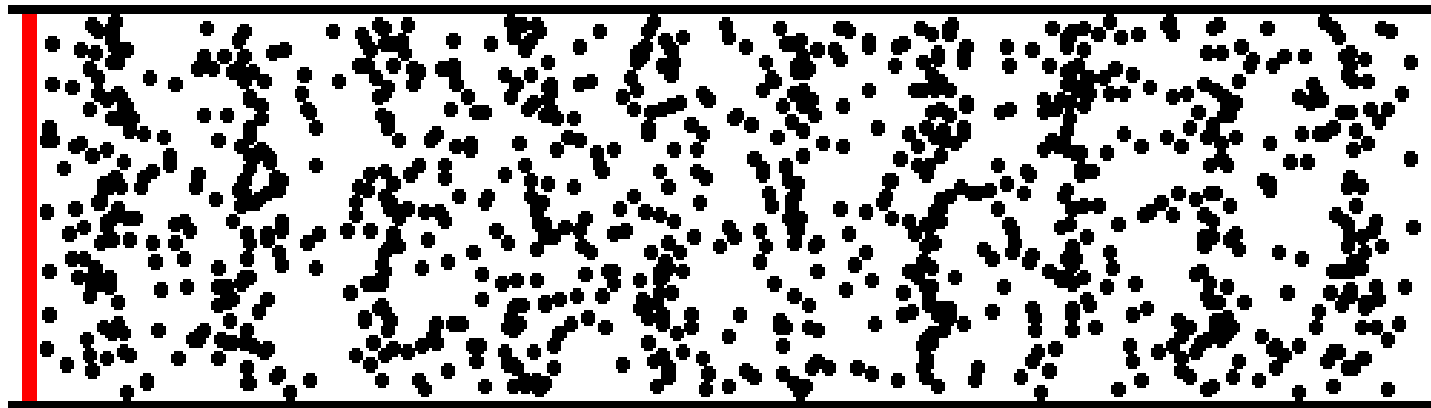


Les types d'onde

3. Ondes longitudinales:

L'animation montre une onde plane longitudinale se propageant à travers un tube. Les particules **NE TRAVERSENT PAS** le tube avec l'onde; elles **OSCILLENT** autour de leur position d'équilibre.

L'onde est visible avec le déplacement de la région comprimée (onde de compression) qui bouge de gauche à droite.



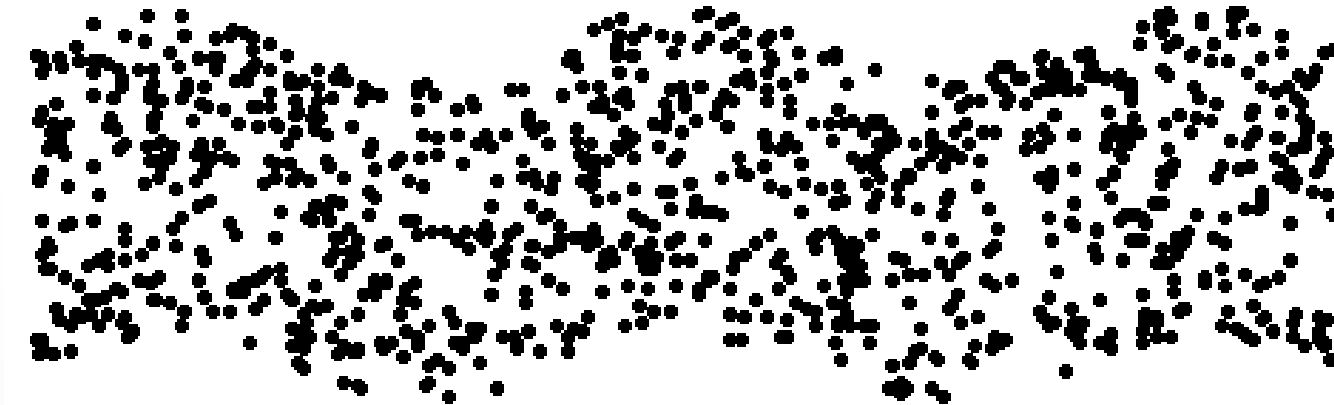
Dans une onde longitudinale, le déplacement de particules est parallèle à la direction de propagation

Les types d'onde

4. Ondes transverses:

Dans le cas d'une onde transverse, le déplacement de particules est perpendiculaire à la direction de l'onde de propagation.

Les particules ne se déplacent pas en suivant l'onde, elles **OSCILLENT de haut en bas** autour de leur position d'équilibre lors du passage de l'onde.



Dans une onde transverse, le déplacement de particules est **perpendiculaire** à la direction de propagation.

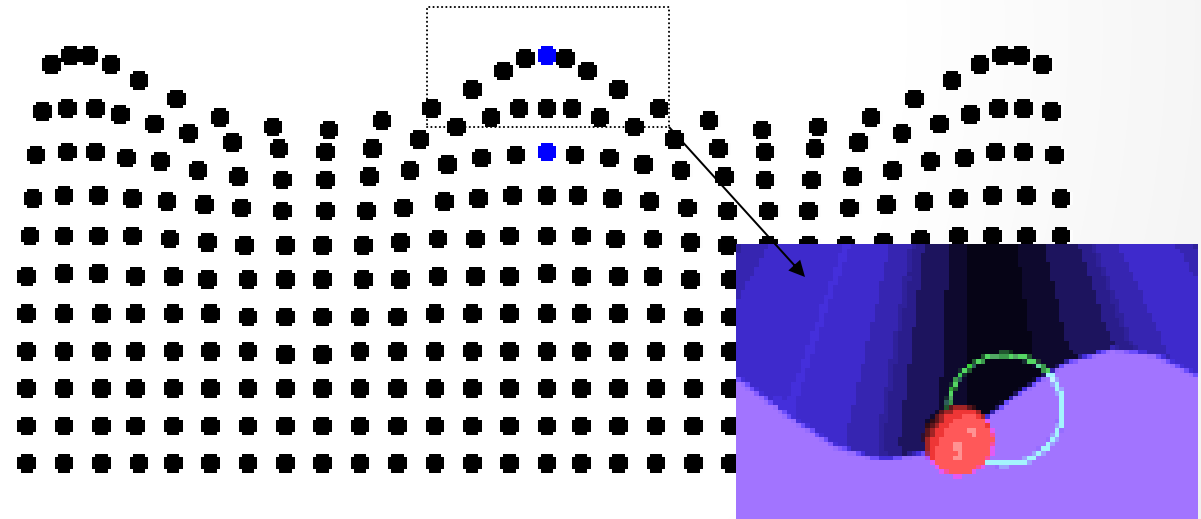
Les types d'onde

5. Ondes transverses et longitudinales:

a) Dans un fluide:

Vagues = exemple d'ondes impliquant une combinaison de mouvements longitudinal et transverse. Quand une particule subit la vague, elle se déplace en **cercles** dans le sens des **aiguilles d'une montre**. Le rayon des cercles diminue quand la profondeur sous la surface augmente.

*Ici, l'onde se propage de la gauche vers la droite dans une région où la **profondeur de l'eau est plus grande que la longueur d'onde** des vagues.*

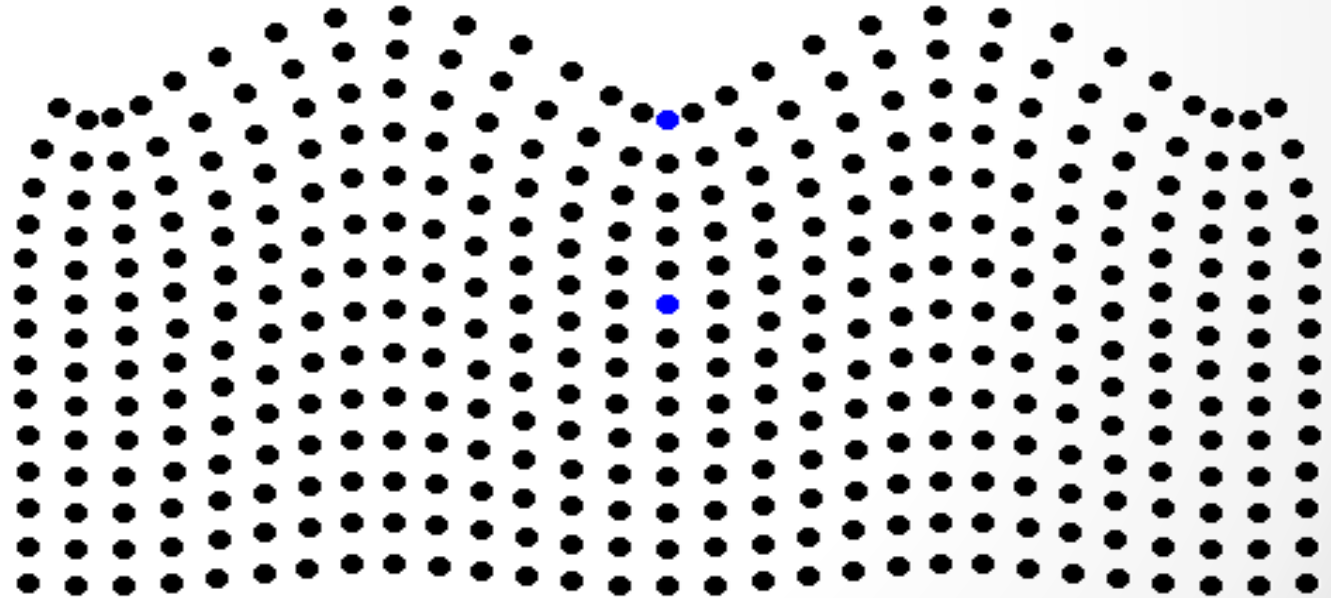


Les types d'onde

b) Dans un solide:

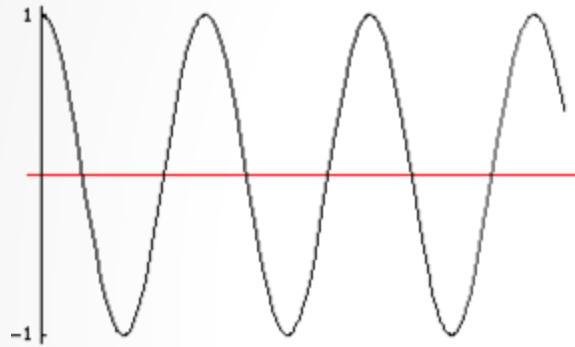
Les particules dans un solide, sont sujettes aux **ondes de surface de Rayleigh**. Elles bougent de manière **elliptique**, avec l'axe principal de l'ellipse perpendiculaire à la surface du solide. Le rayon de l'ellipse diminue avec la profondeur dans le solide.

Les particules à la surface ont une trajectoire elliptique dans le sens inverse des aiguilles d'une montre, alors que celles situées à une profondeur de plus de $1/5^{\text{ème}}$ de la longueur d'onde tournent dans le sens des aiguilles d'une montre.

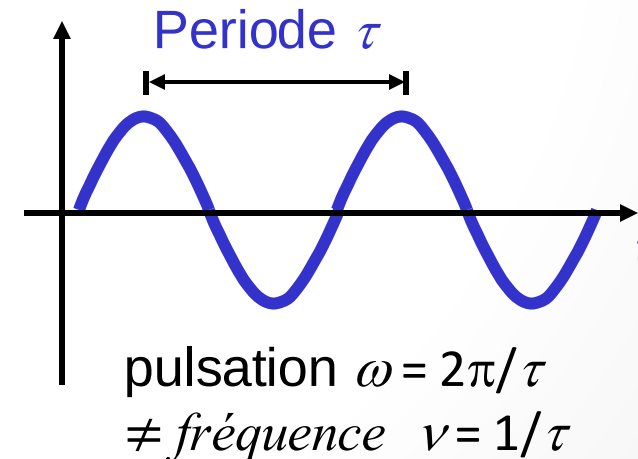
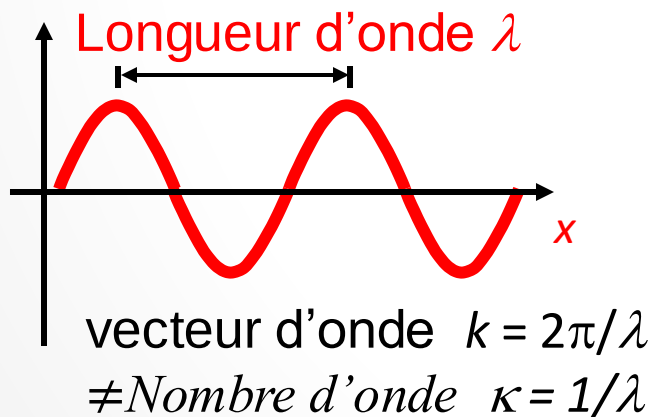


La propagation d'ondes

6. Ondes progressives :



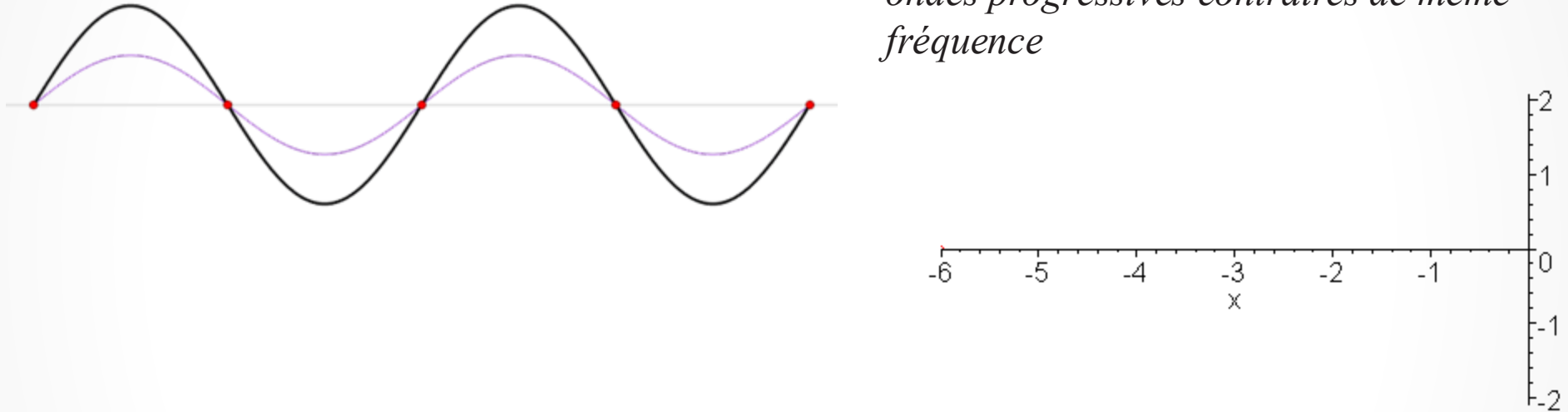
Progressive = perturbation se propage dans l'espace et se retrouve identique à elle-même après une durée $\tau=T$ (période temporelle de propagation) et à une distance de λ (période spatiale de propagation ou longueur d'onde).



La propagation d'ondes

7. Ondes stationnaires:

Une onde stationnaire résulte généralement de la superposition de deux ondes progressives contraires de même fréquence

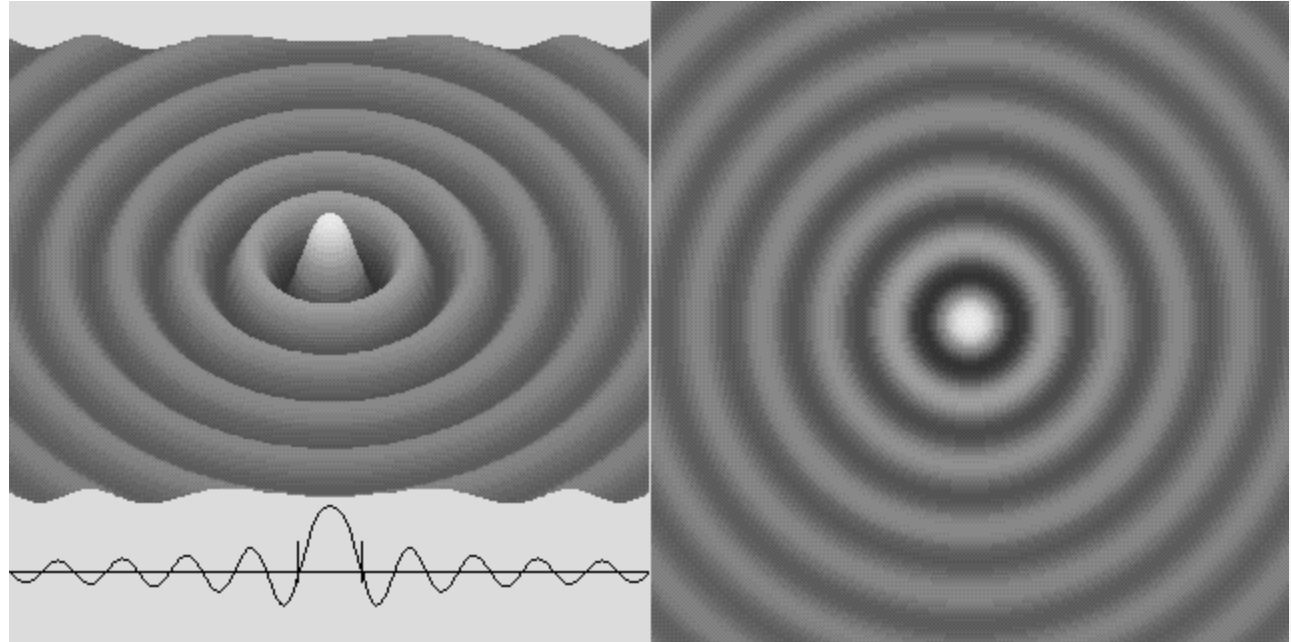


Stationnaire = synchronisme des vibrations des différentes parties du système : en tous les points, la grandeur vibratoire atteint le maximum ou passe par zéro au même instant ; c'est seulement l'amplitude qui varie d'un point à un autre. **Les nœuds (points d'amplitude zéro) et les ventres (points d'amplitude maximale) sont fixes dans l'espace.** Les ondes stationnaires ne transportent **pas** d'énergie.

La propagation d'ondes

Exemple d'ondes stationnaires sphériques:

*Milieu continu illimité:
toutes les fréquences
peuvent faire apparaître
des ondes stationnaires*

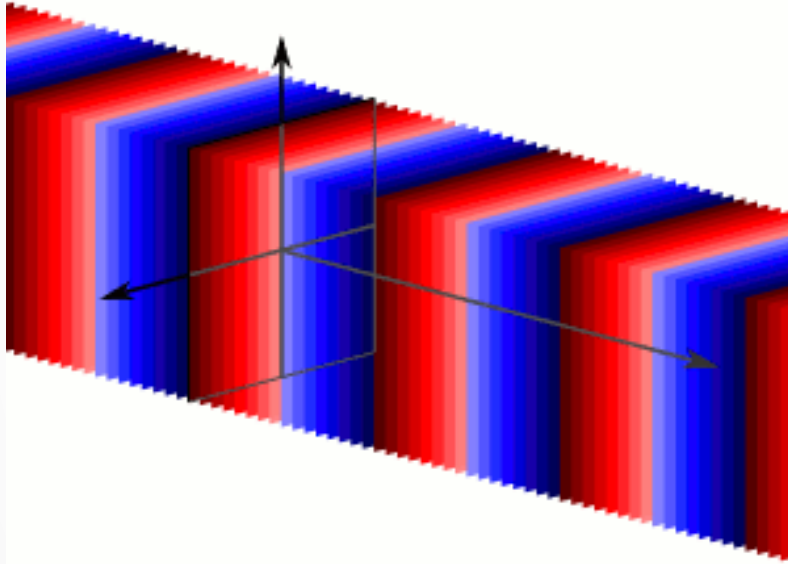


Si les ondes sont confinées dans l'espace, des ondes stationnaires résonantes ne peuvent être créées que pour certaines **valeurs discrètes** de la fréquence

Les types d'onde

8. Ondes planes:

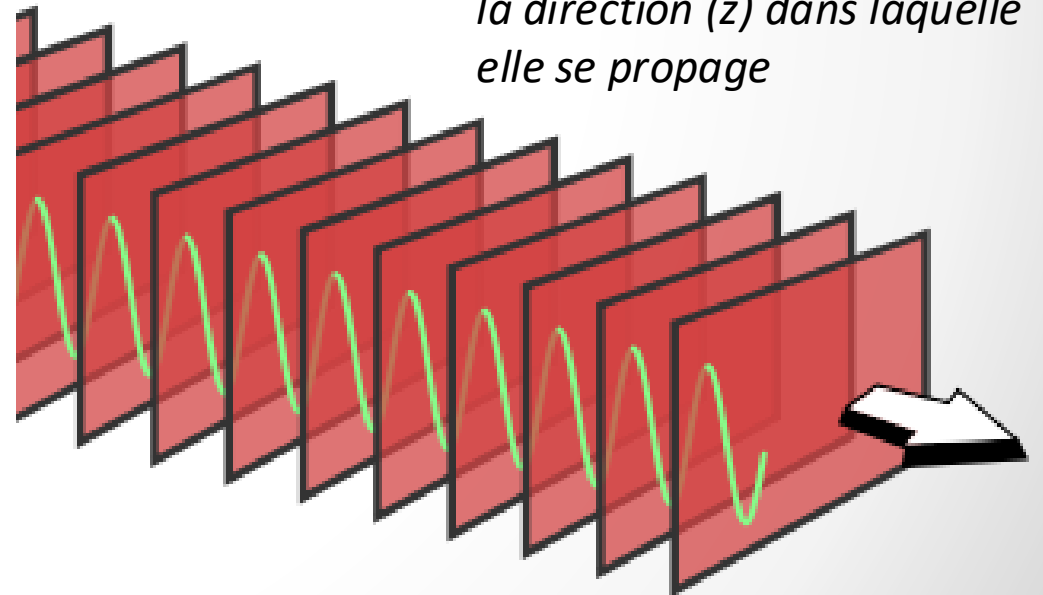
C'est une onde dont les fronts d'onde sont des plans infinis, tous perpendiculaires à une même direction de propagation



$$f(x, y, z, t) = f(z, t)$$

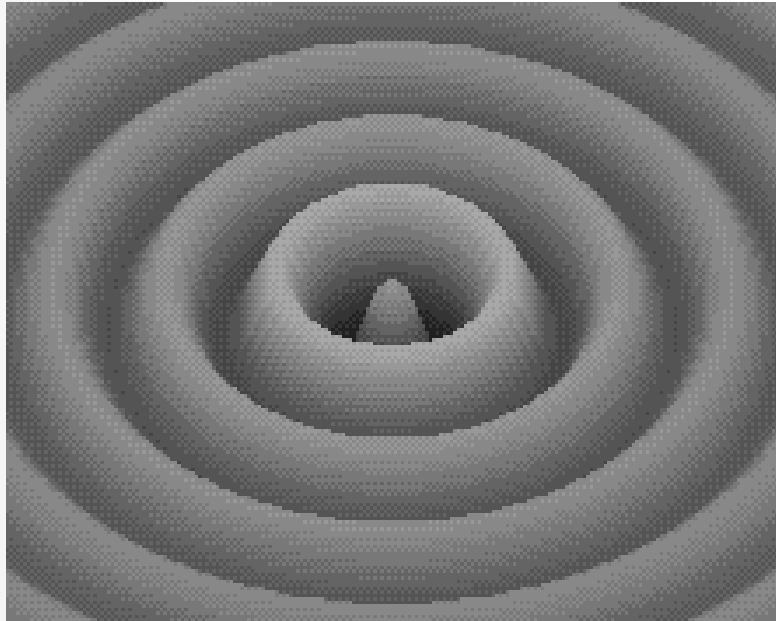
Son amplitude le long de z dépend du temps t mais pas du point d'observation (x, y)

L'onde plane est définie par la direction (z) dans laquelle elle se propage



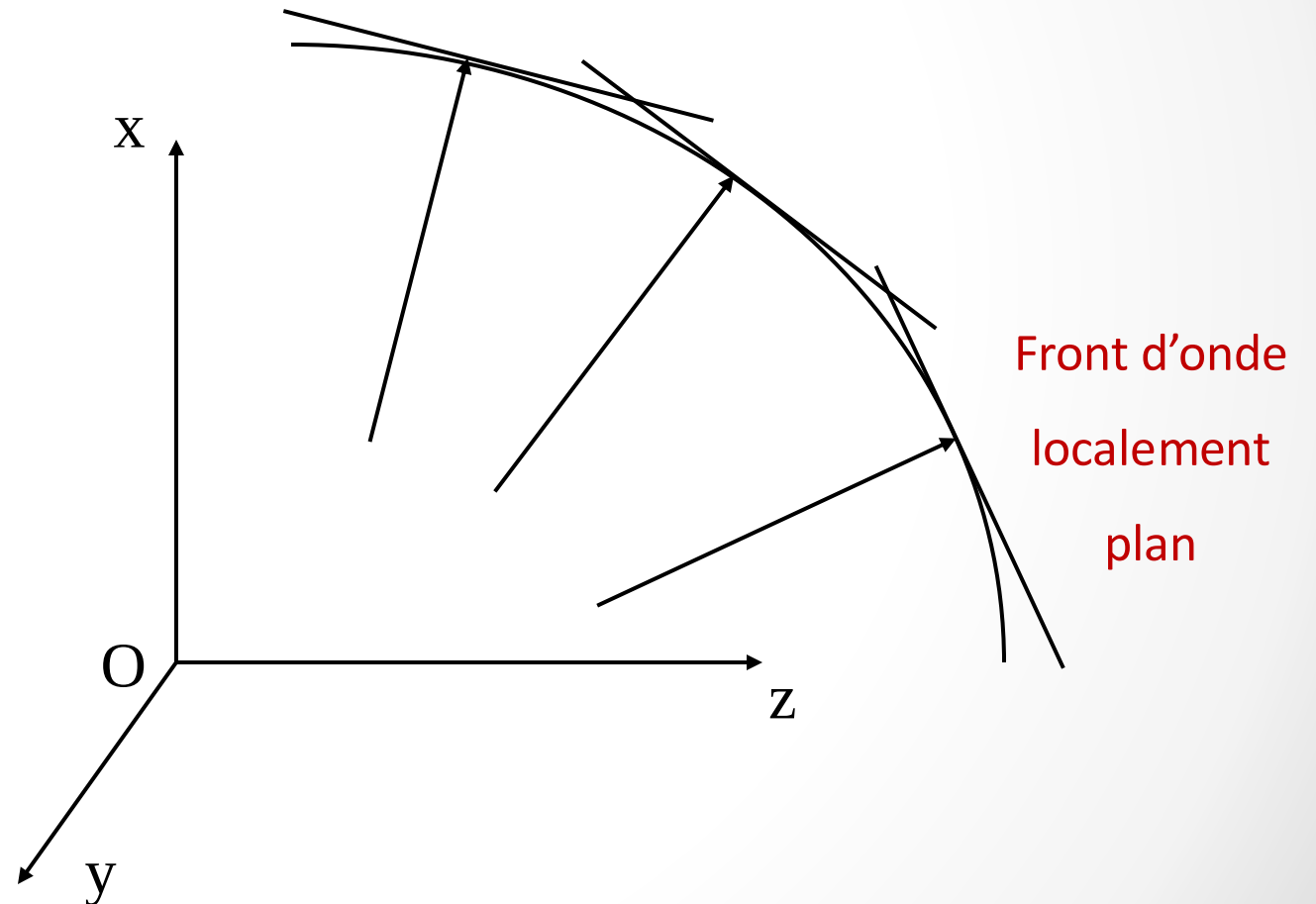
Les types d'onde

Ondes planes ?



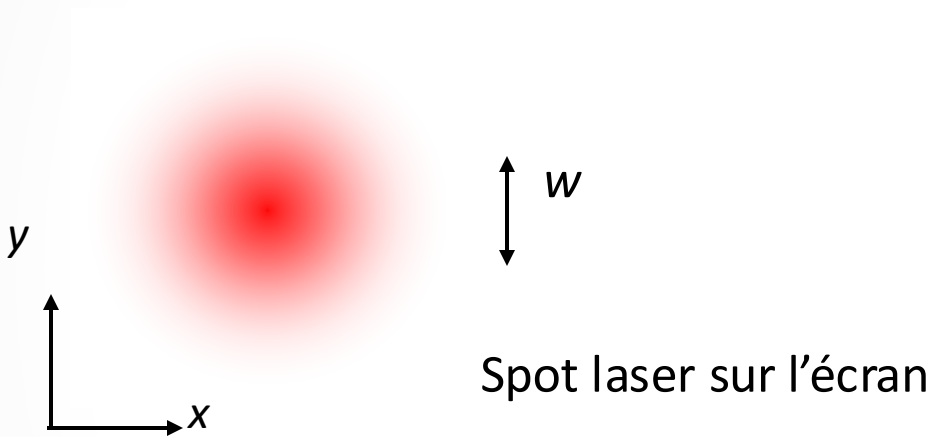
Onde sphérique

Non, mais toute forme d'onde peut être décomposée en ondes planes...



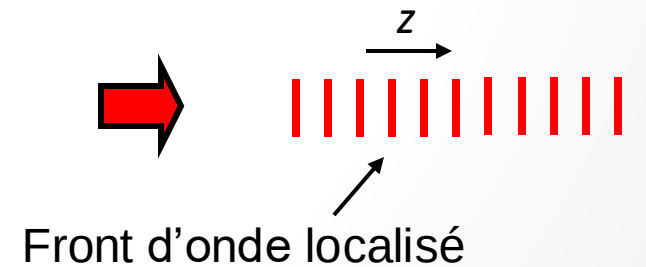
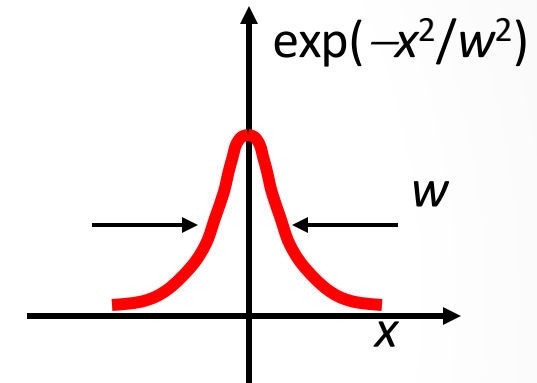
Les types d'onde

Ondes planes ?



Front d'onde plan le long de z *mais pas pour x et y*

Gaussienne en (x,y)



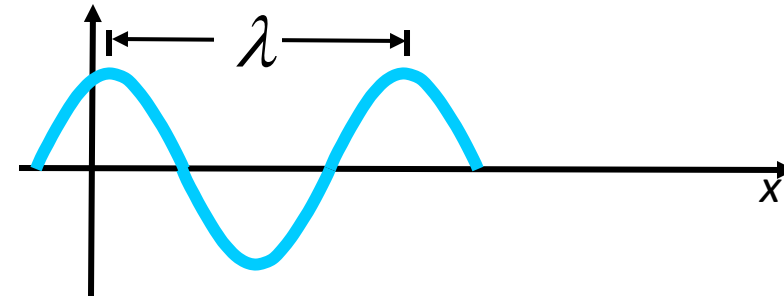
La propagation d'ondes

9. Vitesse d'une onde:

A quelle vitesse se propage-t-elle

La vitesse de phase est le rapport de la longueur d'onde sur la période:

$$v_{\varphi} = \frac{\lambda}{\tau}$$



L'onde se déplace d'une longueur d'onde λ , en une période τ .

En terme de vecteur d'onde k et de pulsation ω , on a donc

$$v_{\varphi} = \frac{\omega}{k}$$

Représentation des ondes



Ne pas confondre l'objet et sa représentation...
⇒ Dissocier le phénomène du modèle

Représentation des ondes

IV – Représentation et équation d'ondes

1. Equation d'onde scalaire:

Une certaine grandeur physique locale $f(x, y, z, t)$, **scalaire ou vectorielle**, vérifie une équation de propagation ou équation d'onde si elle est solution de :

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} - \Delta f = s(x, y, z, t)$$

où c^2 est une constante positive
 $s(x, y, z, t)$ fonction connue représentant la source locale de $f(x, y, z, t)$

Laplacien en coordonnées cartésiennes:
$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

Représentation des ondes

IV – Représentation et équation d'ondes

1. Equation d'onde scalaire:

Si on résout l'équation **loin de la source**, le second membre devient nul, et on traite alors l'équation

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \Delta f$$

C'est l'équation de propagation ou **équation de d'Alembert**

En général, il est **impossible** d'obtenir une **solution analytique** de cette équation

Le problème physique impose des **conditions aux limites** dans la plupart des cas, à la fois sur $f(x, y, z, t)$ et sur sa dérivée

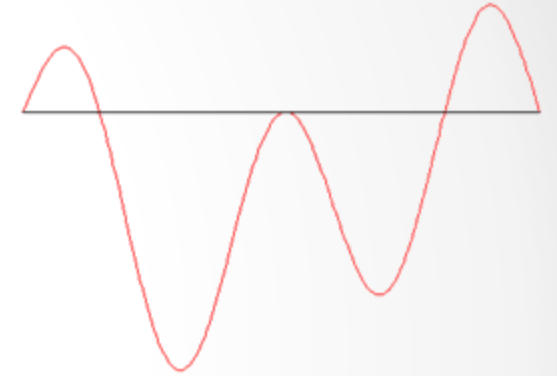
Représentation des ondes

conditions aux limites

Condition de *Dirichlet*

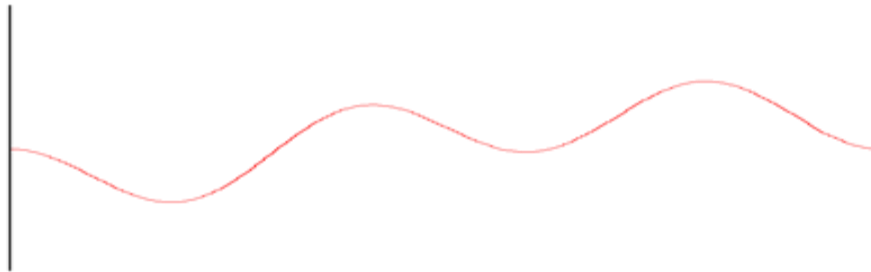
$$f(t, x) = 0 \quad \forall t \quad x \in D$$

($f=0$ sur la frontière)



de *Neumann*

$$\vec{\nabla} f \cdot \vec{n} = 0$$



Représentation des ondes

2) Types de solution à une dimension (source nulle):

Lorsque la géométrie du système permet de négliger les variations transverses, on

est ramené à un problème à **1 dimension** $f(x, y, z, t) \rightarrow f(x, t)$

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \quad (1)$$

Dans ce cas simple, on en déduit une solution générale: [\[Démonstration au tableau\]](#)

Changement de variable de d'Alembert:

$$u = x - ct \text{ et } v = x + ct$$

Solution de (1)

$$f(x, t) = F(x - ct) + G(x + ct)$$

Représentation des ondes

3) Propriétés des solutions particulières F et G :

Vérifions qu'il y a bien propagation:

Afin de conserver une valeur constante à la solution, il suffit de conserver $x + ct$ et $x - ct$ constants.

Soit un petit déplacement dx au cours d'une durée dt .

De $x + ct = Cte$ et $x - ct = Cte$, on tire:

$$x + ct = Cte \quad \longrightarrow$$

$$x - ct = Cte \quad \longrightarrow$$

$$dx + cdt = 0 \rightarrow c_1 = -\frac{dx}{dt}$$

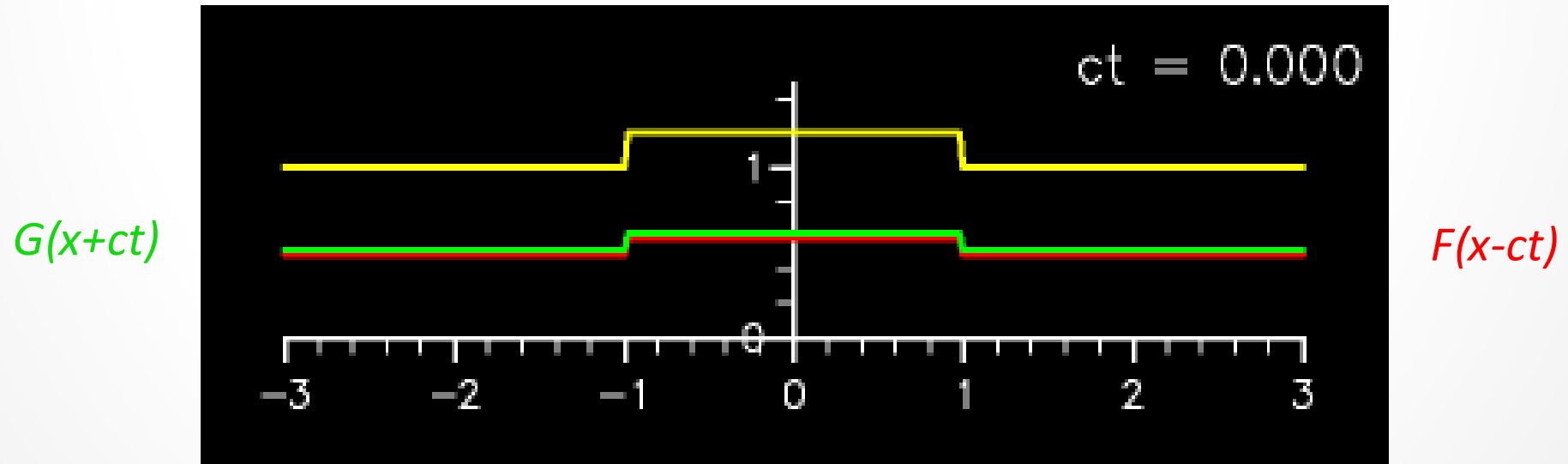
$$dx - cdt = 0 \rightarrow c_2 = \frac{dx}{dt}$$

Représentation des ondes

Si $dx < 0$, le déplacement s'effectue à la vitesse $c_1 = c$

Si $dx > 0$, il s'effectue à la vitesse $c_2 = c$

Un onde dont l'amplitude reste constante se déplace
vers les $x < 0$ [Cas de $G(x+ct)$] et
vers les $x > 0$ [Cas de $F(x-ct)$] avec la même vitesse c .



Représentation des ondes

4) Régime permanent: équation de Helmholtz

Reprenons l'équation de d'Alembert avec cette fois un terme **source** s :

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} - \Delta f = s(x, t)$$

Supposons que cette source présente une dépendance temporelle **périodique**:

$$s(x, t) = s(x) \exp(-i\omega t)$$

Ainsi, l'équation homogène de propagation d'onde en **régime harmonique** s'écrit :

[[Démonstration au tableau](#)]

$$\Delta f(x) + k^2 f(x) = 0$$

Equation de Helmholtz

A une dimension, la solution s'écrit:

$$f(x, t) = A e^{-i\omega(t + \frac{x}{c})} + B e^{-i\omega(t - \frac{x}{c})}$$

Où A et B sont des constantes à définir par les conditions aux limites

Représentation des ondes

5) Utilisation des nombres complexes

$$z = \operatorname{Re}\{z\} + i \operatorname{Im}\{z\} \text{ d'où}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}\{z\} &= 1/2 (z + z^*) \\ \operatorname{Im}\{z\} &= 1/2i (z - z^*) \end{aligned}$$

L'amplitude $|z|$ d'un nombre complexe correspond à:

$$|z|^2 = z z^* = \operatorname{Re}\{z\}^2 + \operatorname{Im}\{z\}^2$$

L'amplitude de l'onde s'écrit alors comme:

$$\begin{aligned} \mathcal{O}(x,t) &= A \cos(kx - \omega t) \\ &= \operatorname{Re} \{ A \exp[i(kx - \omega t - \varphi)] \} \\ &= 1/2 A \exp[i(kx - \omega t - \varphi)] + \text{c.c.} \end{aligned}$$

Intérêt des complexes: $\frac{d}{dx} \exp(ikx) = ik \exp(ikx)$