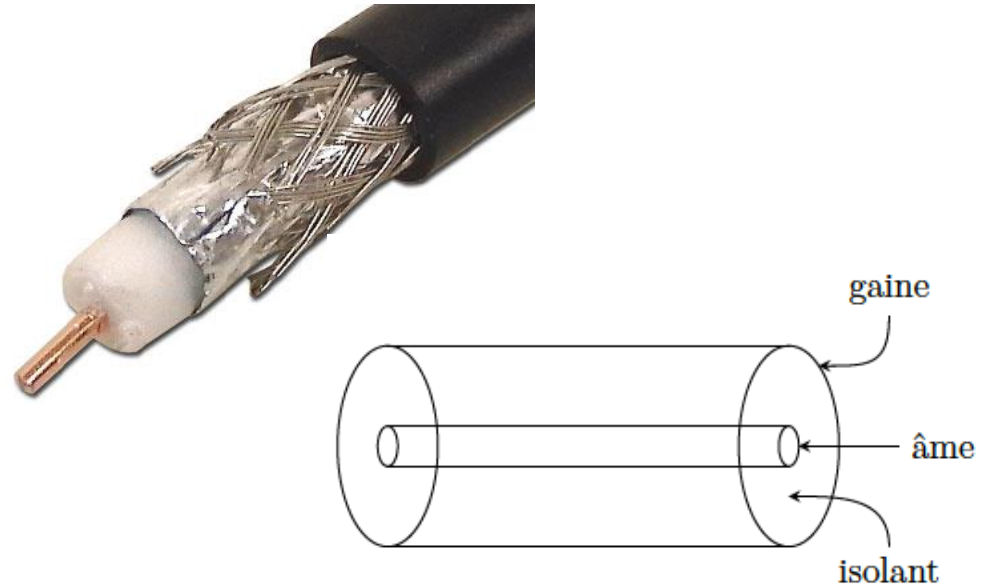
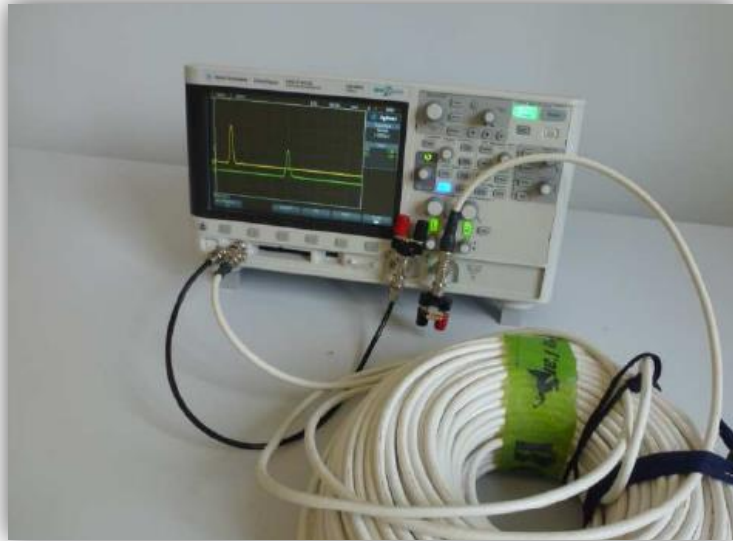


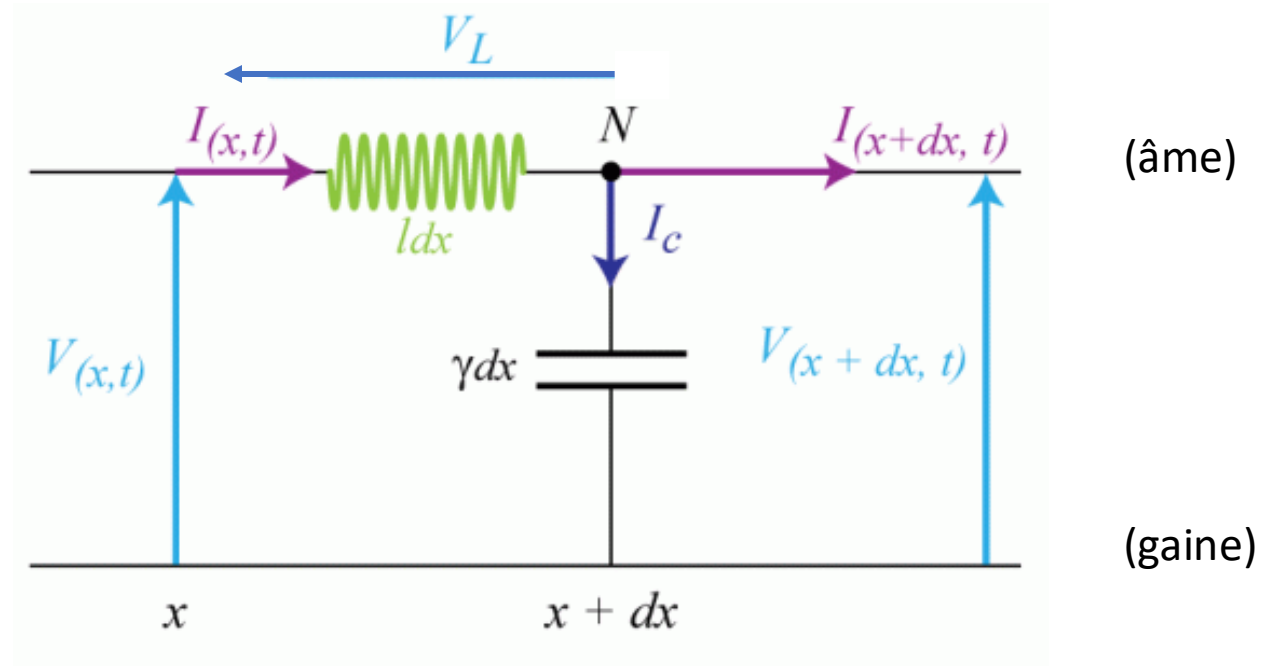
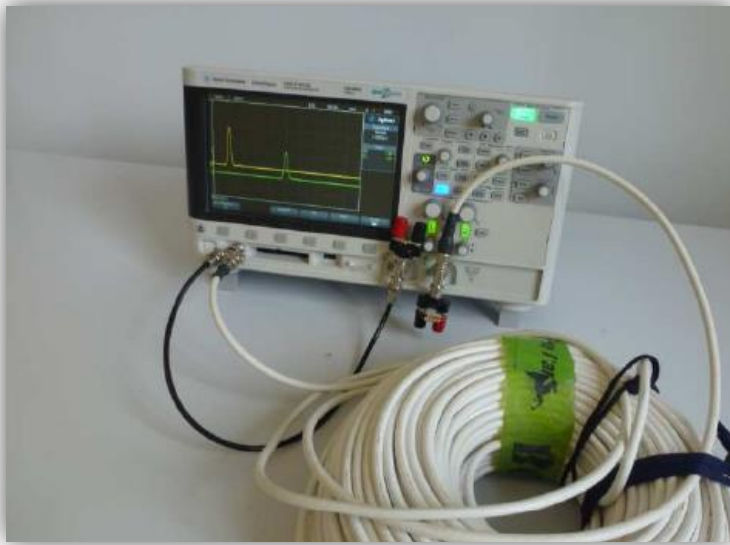
II Phénomènes de propagation

I – Propagation électrique dans un câble coaxial



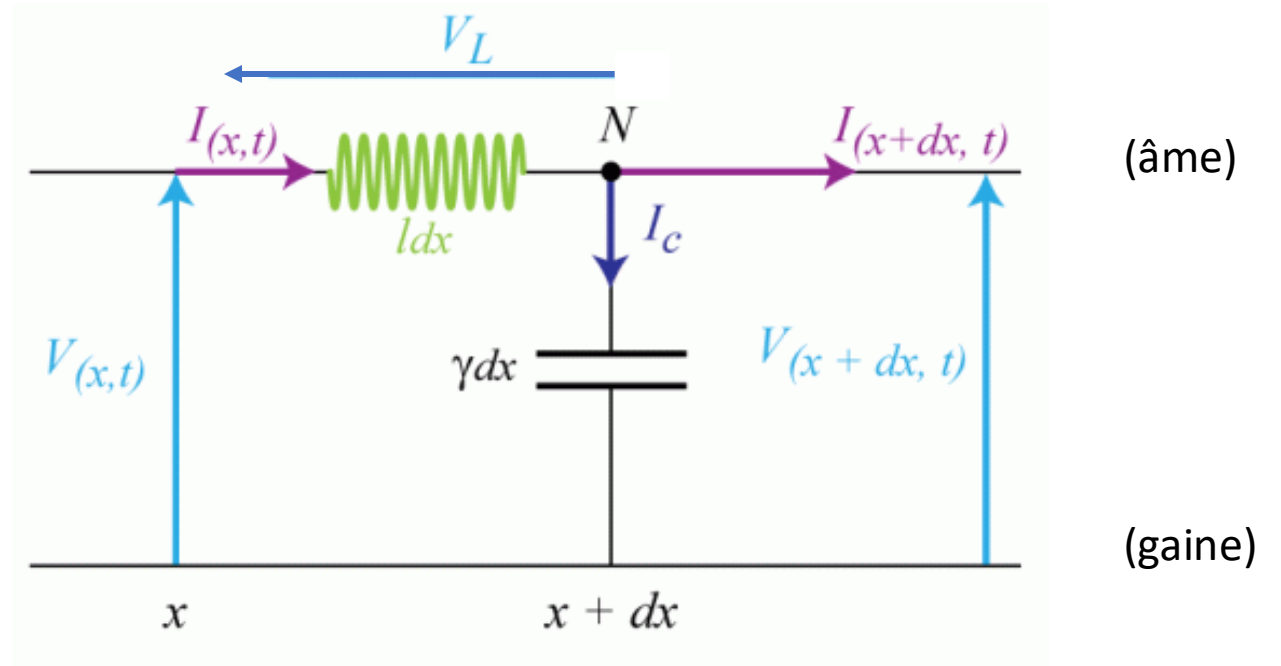
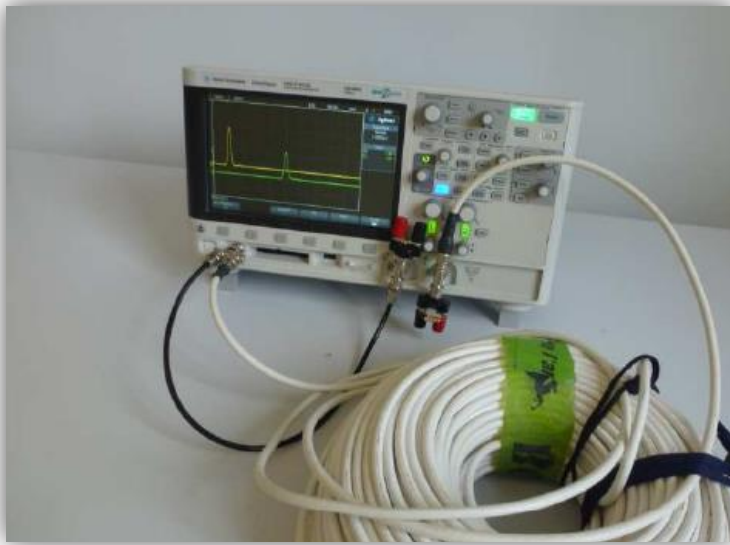
Un câble coaxial est constitué de deux cylindres conducteurs, l'un creux (tresse métallique) et l'autre plein (fil électrique central), de même axe (d'où le nom de coaxial) et séparés par un isolant (gaine) de permittivité relative ϵ_r .

Propagation dans un câble coaxial



- Une portion mésoscopique de câble de longueur dx se modélise par un circuit LC constitué :
- d'une bobine, d'inductance ldx , qui modélise les phénomènes d'induction ayant lieu entre les deux conducteurs, parcourus par des courants variant dans le temps ;
 - d'un condensateur, de capacité γdx , qui modélise les phénomènes capacitifs ayant lieu entre les deux conducteurs, chargés, se faisant face.

Propagation dans un câble coaxial



On peut montrer que le circuit ci-dessous conduit à 2 équations aux dérivées partielles, linéaires et couplées pour I et V . Le découplage se fait en dérivant l'une des deux équations par rapport à la position, l'autre par rapport au temps. On obtient alors la même équation de d'Alembert pour les 2 quantités.

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 I}{\partial x^2} - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 I}{\partial t^2} = 0$$

EQUATION DE D'ALEMBERT

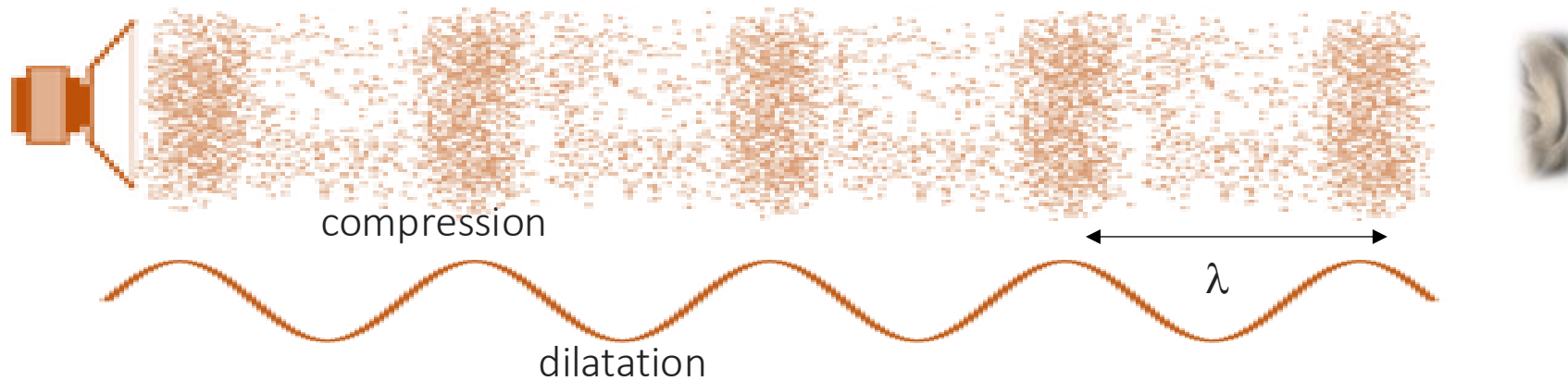
[Démonstration au tableau]

Propagation d'une onde sonore

II – Propagation d'une onde sonore

1) Concepts et définitions

Son = onde acoustique = perturbation mécanique (onde de **compression-dilatation** du milieu) qui se propage dans un **milieu matériel élastique**.



Les ondes acoustiques sont des ondes élastiques qui se propagent dans les fluides, obéissant à l'équation de propagation.

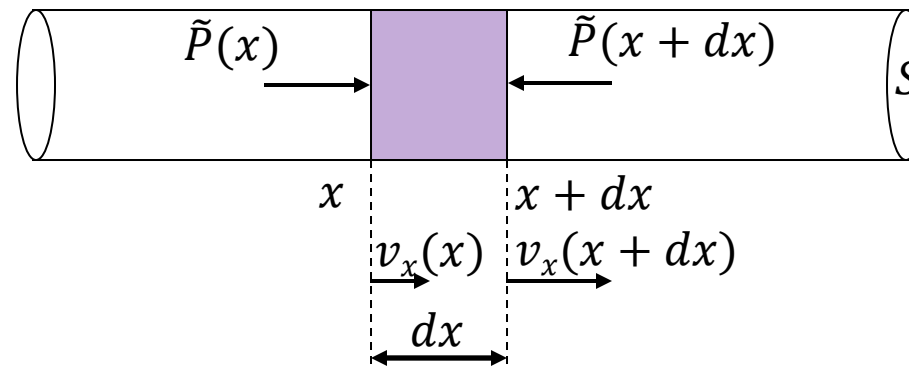
Propagation d'une onde sonore

La perturbation

- ◇ consiste en une modification locale et temporaire des propriétés matière
- ◇ est // à la direction de propagation, donc **longitudinale**
- ◇ se propage sous forme d'onde, sans transport de matière mais d'énergie



Modèle d'une tranche de fluide



$\tilde{P}(x)$ – pression locale
 $v_x(x)$ – vitesse de déplacement
 $\tilde{\rho}(x)$ – masse volumique

$\tilde{P} = P_0 + p$ ← surpression ($10^{-7} P_0$)
 $\tilde{\rho} = \rho_0 + \rho$ ← surdensité

Propagation d'une onde sonore

2) Mise en équation pour une particule infinitésimale de fluide:

- Relation Fondamentale de la Dynamique

$$\begin{array}{ccc} & \sum \vec{F} = m \vec{a} & \\ \nearrow & & \nwarrow \\ -\frac{\partial p(x,t)}{\partial x} \cdot S \cdot dx & & \rho_0 \cdot S \cdot dx \frac{\partial v(x,t)}{\partial t} \end{array}$$
$$-\frac{\partial p(x,t)}{\partial x} = \rho_0 \frac{\partial v(x,t)}{\partial t} \quad (1)$$

- Comment ρ varie ? Conservation de la masse

$$\frac{\partial \rho(x,t)}{\partial t} = -\rho_0 \frac{\partial v(x,t)}{\partial x} \quad (2)$$

Evolution

Flux

$$\frac{\partial \rho(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial \rho v(x,t)}{\partial x} = 0$$

Equation stipule que la variation de la masse dans l'élément infinitésimal est égal à la différence entre la masse entrante et la masse sortante. Le 2^{ème} ordre est négligé

Propagation d'une onde sonore

- *Comment p varie avec ρ ? Compressibilité isentropique χ_s*

$$\chi_s = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_s = \frac{1}{\tilde{\rho}} \left(\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial \tilde{P}} \right)_s \approx \frac{1}{\rho_0} \frac{\rho(x, t)}{p(x, t)}$$

Hypothèse adiabatique: longueur de la perturbation $\gg$ libre parcours moyen des molécules

$$\rho(x, t) = \rho_0 \chi_s p(x, t) \quad (3)$$

On suppose que l'évolution de l'état d'une particule fluide se fait avec des constantes de temps trop rapides pour qu'il y ait échange de chaleur. L'évolution est alors isentropique (cf cours Thermodynamique)

Propagation d'une onde sonore

En combinant (2) et (3), on obtient

$$-\rho_0 \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial \rho}{\partial t} = \rho_0 \chi_s \frac{\partial p}{\partial t},$$

que l'on dérive par rapport au temps:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = -\frac{1}{\chi_s} \frac{\partial^2 v}{\partial t \partial x} \stackrel{\text{Avec (1)}}{=} \frac{1}{\rho_0 \chi_s} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}$$

Soit

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - \frac{1}{c_s^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0$$

EQUATION DE D'ALEMBERT

Encore...

Hypothèse non-dissipative, linéaire

Quelques ordres de grandeur:

$c_s = 340 \text{ m.s}^{-1}$ dans l'air

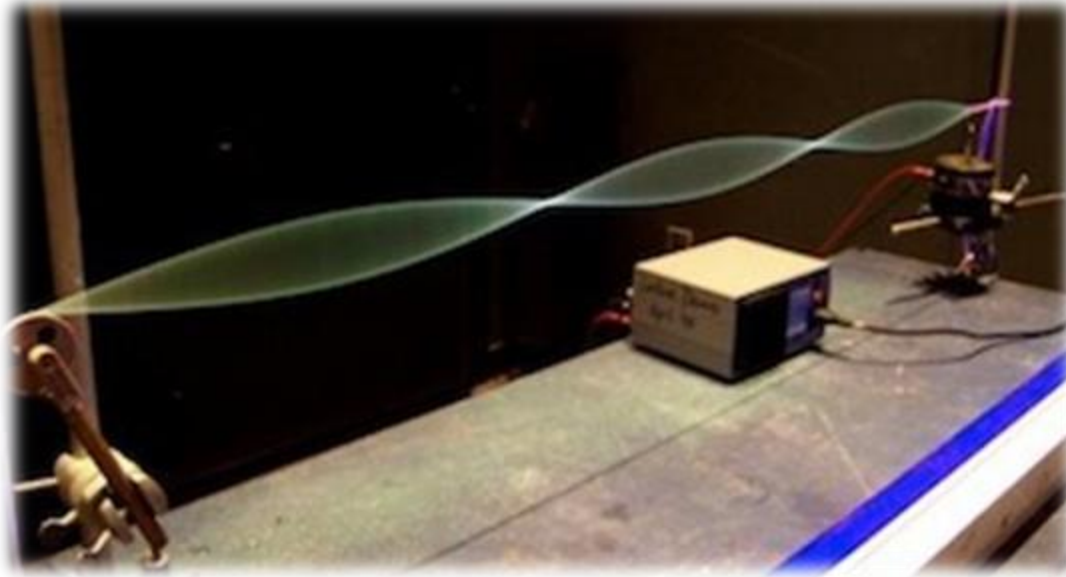
$c_s = 1480 \text{ m.s}^{-1}$ dans l'eau

Avec $c_s = \frac{1}{\sqrt{\rho_0 \chi_s}}$ la vitesse du son dans le fluide

Compétition entre l'inertie (ρ_0) et d'élasticité ($\sim 1/\chi_s$)

Propagation le long d'une corde

III – Propagation le long d'une corde

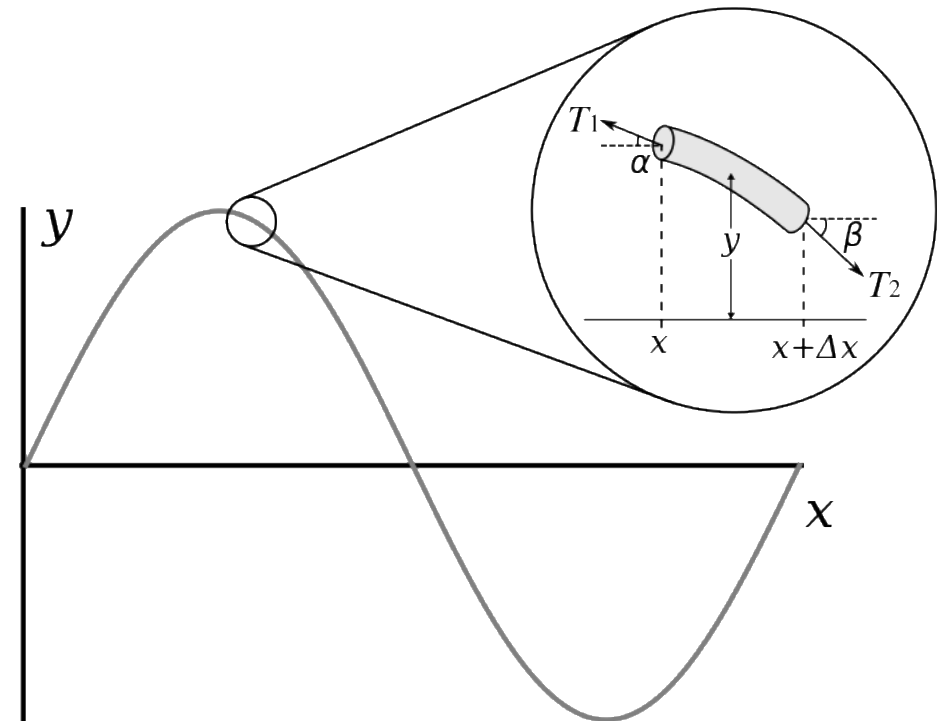


Ondes sur une corde vibrante

Le générateur de fréquence va imposer des modes d'oscillation à la corde



Exemple d'onde transverse



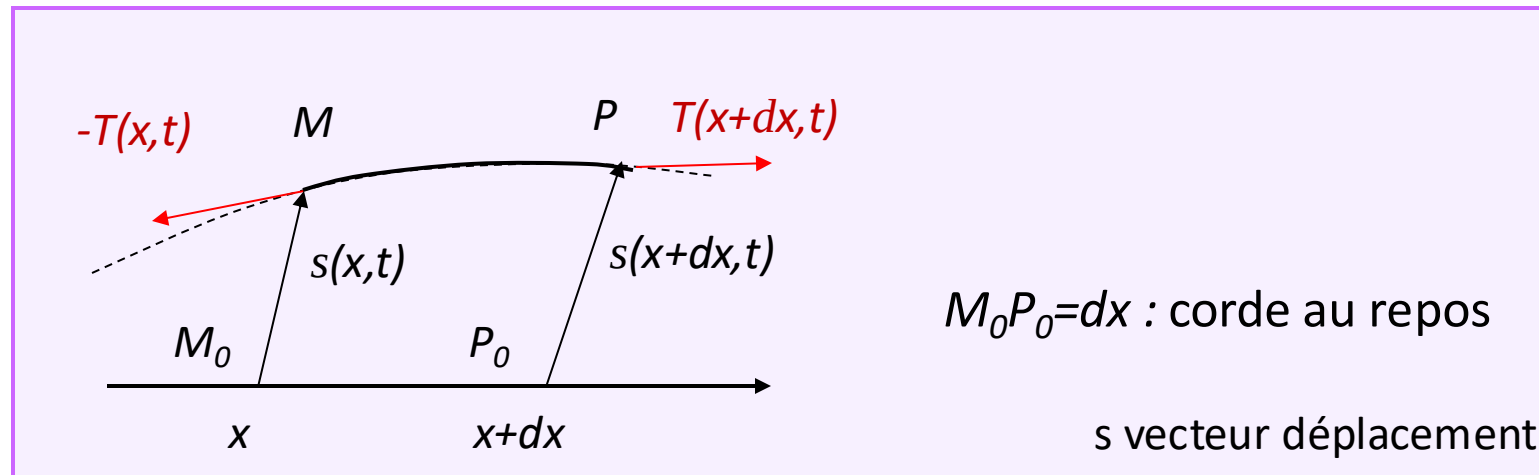
Propagation le long d'une corde

Modélisation :

On suppose une corde infiniment souple (sans raideur), pré-tendue, en négligeant son poids

⇒ La corde se courbe sans effort

⇒ Direction de la **force** interne entre les éléments de la corde (la tension) = celle de la **tangente locale** à la corde



Forces de tension sur MP

Propagation le long d'une corde

On confond ds à dx car $dy \ll dx$

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = dx \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2} \sim dx$$

La force totale agissant sur MP est:

$$dF = T(x + dx, t) - T(x, t)$$

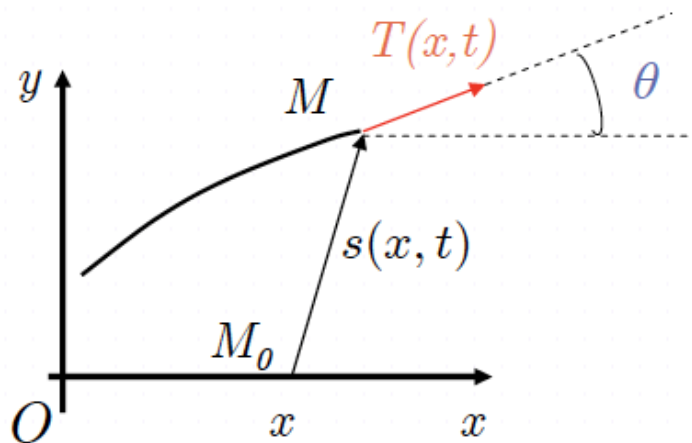
Théorème du centre d'inertie:

$$m = \mu dx$$

$$\mu dx \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{s} \left(x + \frac{dx}{2}, t \right) = \vec{T}(x + dx, t) - \vec{T}(x, t)$$
$$(dx \rightarrow 0) \Rightarrow \mu \frac{\partial^2 \vec{s}}{\partial t^2} = \frac{\partial \vec{T}}{\partial x}$$

Propagation le long d'une corde

Approximation des petites amplitudes :


$$\begin{cases} \mu \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} (T \cos \theta) \\ \mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} (T \sin \theta) \end{cases}$$

$$\tan \theta \sim \theta = \frac{\partial y}{\partial x}$$

d'où

$$\mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} (T \sin \theta) = T \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

On en déduit
l'équation d'onde

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{\mu}{T} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0$$

Propagation le long d'une corde

On retrouve l'équation de d'Alembert, avec une

vitesse d'onde donnée par

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

Dans cette approximation, l'équation du mouvement transversal est découplée d'un déplacement longitudinal éventuel

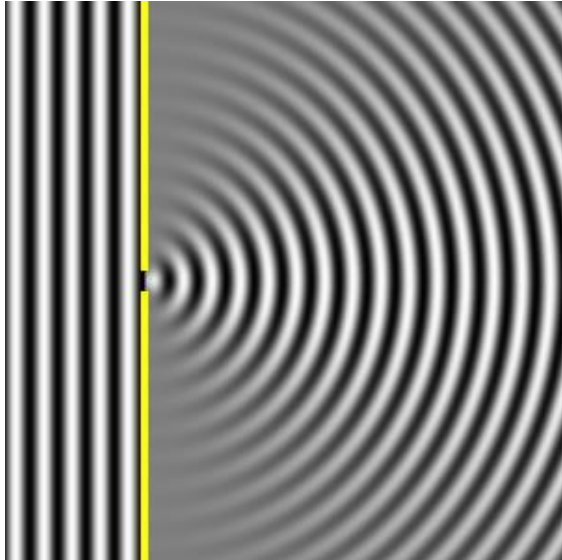
Solution générale :

On sait que cette équation a pour solution générale

$$y(x, t) = F(x - vt) + G(x + vt)$$

Propagation électromagnétique

IV – Propagation d'onde lumineuse



Le principe d'Huygens stipule que chaque point le long d'un front d'onde émet une onde sphérique qui interfère avec toutes les autres.



Christiaan Huygens
1629 – 1695



Le champ dans le plan d'observation, $E(x', y')$
=

Somme d'ondes sphériques de tous les points à l'intérieur de l'ouverture

Propagation électromagnétique

Equations de Maxwell dans le vide

$$\begin{array}{ll} \vec{\nabla} \cdot \vec{\mathcal{E}} = 0 & \overset{= \text{rot}}{\vec{\nabla} \times \vec{\mathcal{E}}} = - \frac{\partial \vec{\mathcal{B}}}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{\mathcal{B}} = 0 & \underset{= \text{rot}}{\vec{\nabla} \times \vec{\mathcal{B}}} = \mu \varepsilon \frac{\partial \vec{\mathcal{E}}}{\partial t} \end{array}$$

Ce sont les équations de l'optique !

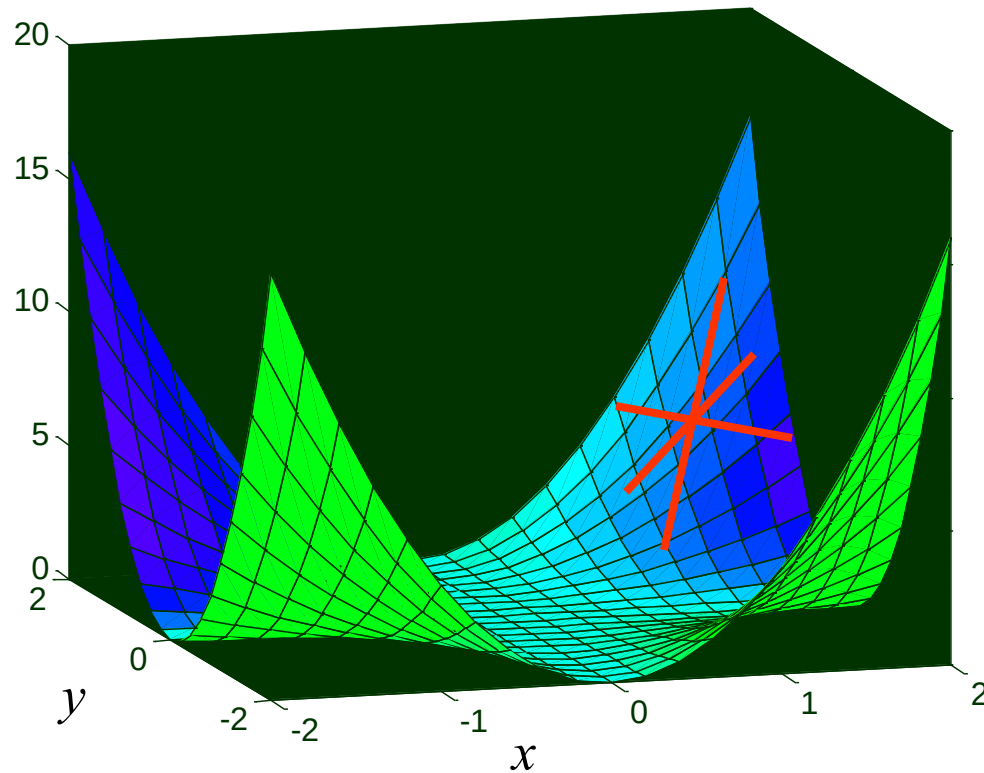
où $\vec{\mathcal{E}}$ est le champ électrique, $\vec{\mathcal{B}}$ est le champ magnétique, ε est la permittivité, et μ est la perméabilité magnétique du milieu.

Hypothèse sans charge ni courant ici.

Propagation électromagnétique

Modélisation :

Le vecteur gradient



La dérivée d'un champ scalaire

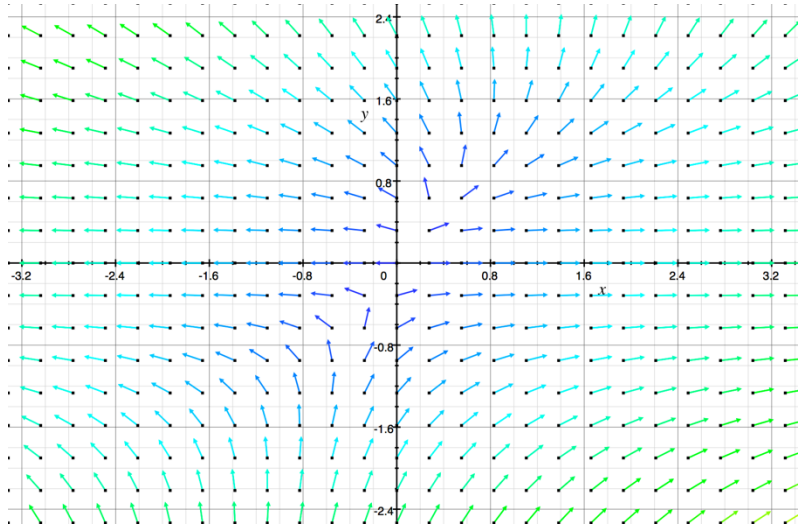
$$\overrightarrow{grad} f(x, y, z) = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{k}$$

Il peut aussi s'écrire à l'aide de l'opérateur "nabla" : $\vec{\nabla}$

$$\vec{\nabla} = \overrightarrow{grad} = \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z}$$

Propagation électromagnétique

La divergence



$$\vec{V}(M) = \vec{V}(x, y, z) = V_x(x, y, z)\vec{u}_x + V_y(x, y, z)\vec{u}_y + V_z(x, y, z)\vec{u}_z$$

Définition de la divergence du vecteur

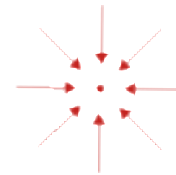
$$\text{div}(\vec{V}) = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z}$$

soit

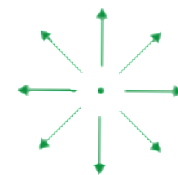
$$\text{div}(\vec{V}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{V}$$

Cette fois, l'application du vecteur "nabla" donne un scalaire

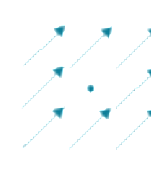
$$\nabla \cdot \vec{v} < 0$$



$$\nabla \cdot \vec{v} > 0$$



$$\nabla \cdot \vec{v} = 0$$



Le Laplacien

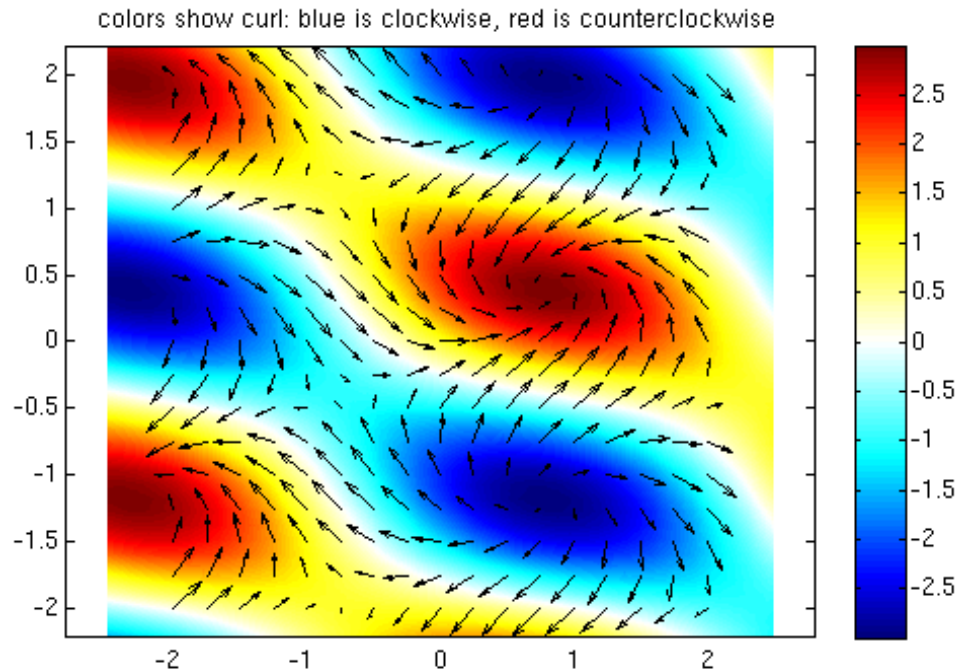
$$\Delta = \text{div} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \vec{u}_x + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{u}_y + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{u}_z \right) \Rightarrow \Delta = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

$$\Delta f = \text{div}(\vec{\text{grad}}(f)) = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} f) = \vec{\nabla}^2 f$$

Propagation électromagnétique

Le rotationnel

$$\vec{V}(M) = \vec{V}(x, y, z) = V_x(x, y, z)\vec{u}_x + V_y(x, y, z)\vec{u}_y + V_z(x, y, z)\vec{u}_z$$



$$\overrightarrow{rot}(\vec{V}) = \vec{\nabla} \wedge \vec{V} = \begin{pmatrix} \frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z} \\ \frac{\partial V_x}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial x} \\ \frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y} \end{pmatrix}$$

A savoir:

$$\overrightarrow{rot}[\overrightarrow{rot}(\vec{V})] = \overrightarrow{grad}[div(\vec{V})] - \Delta \vec{V}$$

Propagation électromagnétique

Equations de Maxwell dans le vide

$$\begin{array}{ll} \vec{\nabla} \cdot \vec{\mathcal{E}} = 0 & \overset{= \text{rot}}{\vec{\nabla} \times \vec{\mathcal{E}}} = - \frac{\partial \vec{\mathcal{B}}}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{\mathcal{B}} = 0 & \underset{= \text{rot}}{\vec{\nabla} \times \vec{\mathcal{B}}} = \mu \varepsilon \frac{\partial \vec{\mathcal{E}}}{\partial t} \end{array}$$

Ce sont les équations de l'optique !

où $\vec{\mathcal{E}}$ est le champ électrique, $\vec{\mathcal{B}}$ est le champ magnétique, ε est la permittivité, et μ est la perméabilité magnétique du milieu.

Hypothèse sans charge ni courant ici.

Propagation électromagnétique

Prenons $\nabla \times$ de $\nabla \times \mathcal{E} = -\frac{\partial \mathcal{B}}{\partial t}$ donnant: $\nabla \times [\nabla \times \mathcal{E}] = \nabla \times \left[-\frac{\partial \mathcal{B}}{\partial t} \right]$

Changeons l'ordre de différenciation :

$$\nabla \times [\nabla \times \mathcal{E}] = -\frac{\partial}{\partial t} [\nabla \times \mathcal{B}]$$

Mais: $\nabla \times \mathcal{B} = \mu\epsilon \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t}$

Substituons, $\nabla \times \mathcal{B}$ nous obtenons $\nabla \times [\nabla \times \mathcal{E}] = -\frac{\partial}{\partial t} \left[\mu\epsilon \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} \right]$

$$\Rightarrow \nabla \times [\nabla \times \mathcal{E}] = -\mu\epsilon \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial t^2}$$

Avec l'hypothèse que μ and ϵ sont constants dans le temps

Propagation électromagnétique

Soit,
$$\nabla \times [\nabla \times \vec{\mathcal{E}}] = -\mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{\mathcal{E}}}{\partial t^2}$$

devient:
$$\nabla(\nabla \cdot \vec{\mathcal{E}}) - \nabla^2 \vec{\mathcal{E}} = -\mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{\mathcal{E}}}{\partial t^2}$$

Sous l'hypothèse d'une **densité de charge nulle**: $\rho = 0$, on a $\nabla \cdot \vec{\mathcal{E}} = 0$

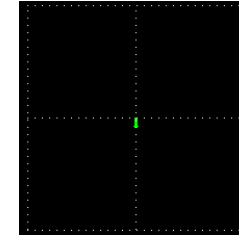
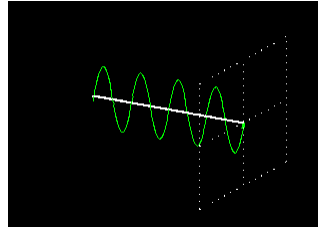
Et nous obtenons l'équation d'onde vectorielle pour le champ électrique

$$\nabla^2 \vec{\mathcal{E}} = \mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{\mathcal{E}}}{\partial t^2} \quad \text{où } \mu\epsilon = 1/c^2$$

Propagation électromagnétique

Supposons une onde se propageant dans la direction x et ayant son champ électrique le long de y [donc $\mathcal{E}_x = \mathcal{E}_z = 0$, et $\mathcal{E}_y = \mathcal{E}_y(x, t)$].

$$\mathcal{E}_y = A \exp[i(kx - \omega t)]$$



Quelle est la direction du champ magnétique?

Utilisons: $-\frac{\partial \mathcal{B}}{\partial t} = \nabla \times \mathcal{E} = \left(\frac{\partial \mathcal{E}_z}{\partial y} - \frac{\partial \mathcal{E}_y}{\partial z}, \frac{\partial \mathcal{E}_x}{\partial z} - \frac{\partial \mathcal{E}_z}{\partial x}, \frac{\partial \mathcal{E}_y}{\partial x} - \frac{\partial \mathcal{E}_x}{\partial y} \right)$

Soit: $-\frac{\partial \mathcal{B}}{\partial t} = \left(0, 0, \frac{\partial \mathcal{E}_y}{\partial x} \right)$ Et ainsi $-\frac{\partial \mathcal{B}_z}{\partial t} = \frac{\partial \mathcal{E}_y}{\partial x}$

Le champ magnétique
est suivant la direction z .

