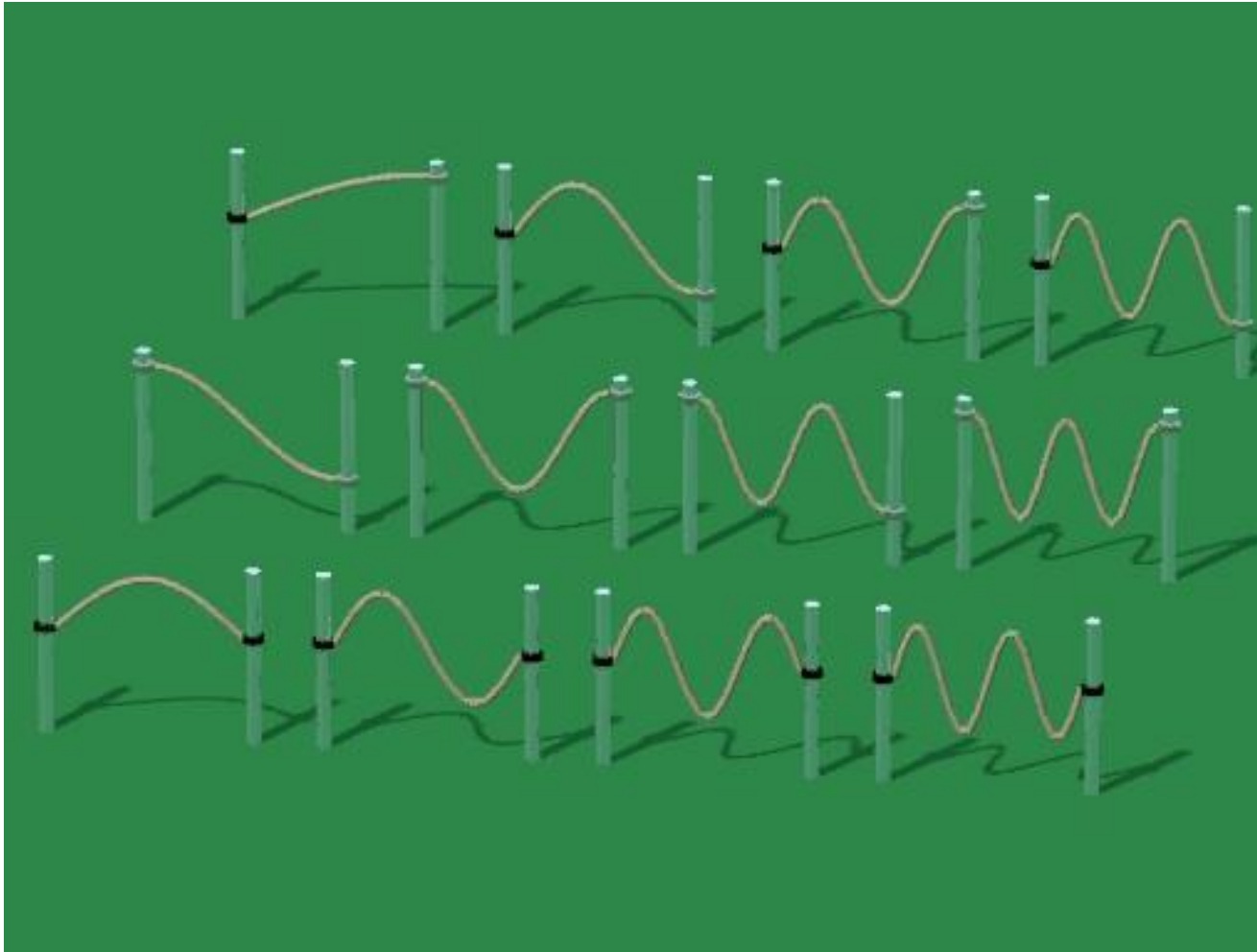


III Ondes Progressives et stationnaires

I – Vibrations transversales d'une corde tendue



*Effet des
conditions aux
limites et
propriétés des
ondes
stationnaires*

Propagation le long d'une corde

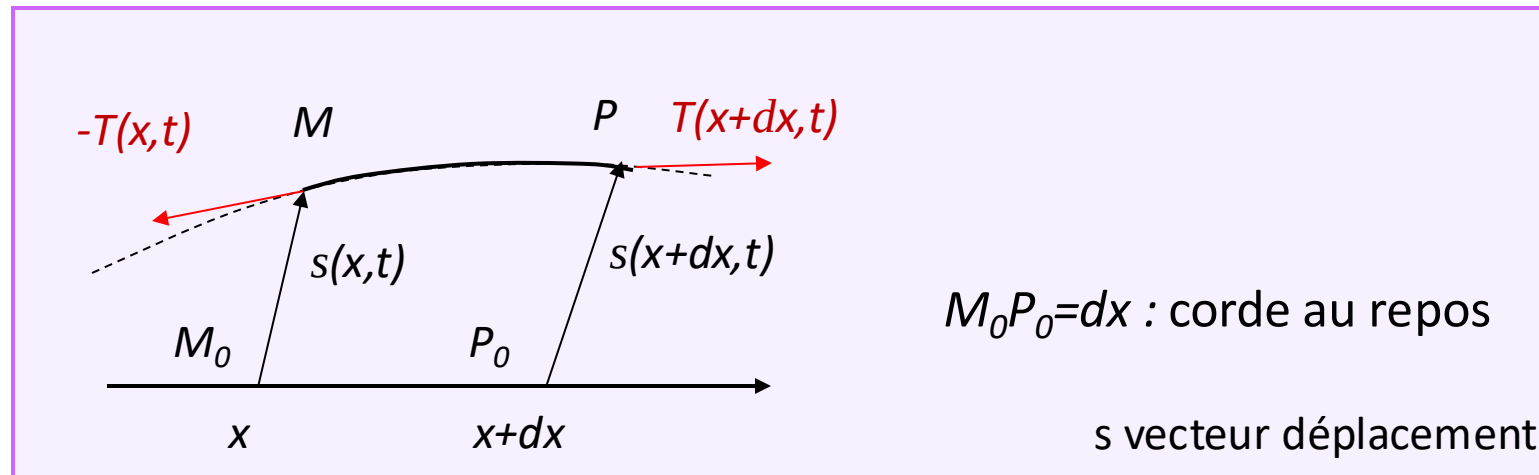
1/ Modélisation :

On suppose une corde infiniment souple (sans raideur), pré-tendue, en négligeant son poids

⇒ La corde se courbe sans effort



⇒ Direction de la **force** interne entre les éléments de la corde (la tension) = celle de la **tangente locale** à la corde



Forces de tension sur MP

Propagation le long d'une corde

On confond ds à dx car $dy \ll dx$

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = dx \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2} \sim dx$$

La force totale agissant sur MP est:

$$dF = T(x + dx, t) - T(x, t)$$

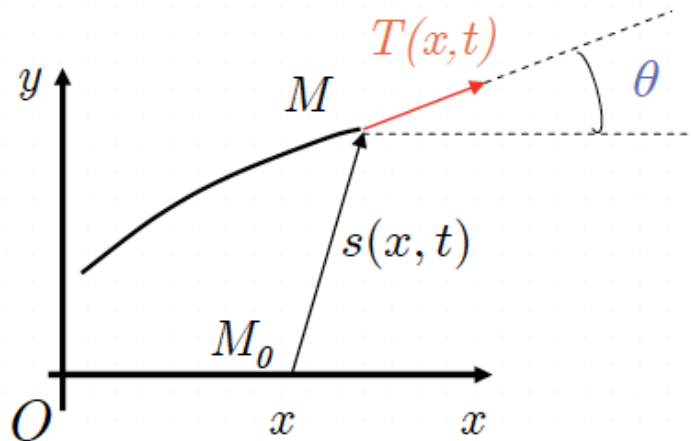
Théorème du centre d'inertie:

$$m = \mu dx$$

$$\mu dx \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{s} \left(x + \frac{dx}{2}, t \right) = \vec{T}(x + dx, t) - \vec{T}(x, t)$$
$$(dx \rightarrow 0) \Rightarrow \mu \frac{\partial^2 \vec{s}}{\partial t^2} = \frac{\partial \vec{T}}{\partial x}$$

Propagation le long d'une corde

Approximation des petites amplitudes :


$$\begin{cases} \mu \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} (T \cos \theta) \\ \mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} (T \sin \theta) \end{cases}$$

$$\tan \theta \sim \theta = \frac{\partial y}{\partial x}$$

d'où

$$\mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} (T \sin \theta) = T \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

On en déduit
l'équation d'onde

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{\mu}{T} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0$$

Propagation le long d'une corde

On retrouve l'équation de d'Alembert, avec une

vitesse d'onde donnée par

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

Dans cette approximation, l'équation du mouvement transversal est découplée d'un déplacement longitudinal éventuel

Solution générale :

On sait que cette équation a pour solution générale

$$y(x, t) = F(x - vt) + G(x + vt)$$

2/ Conditions initiales sur une corde infinie :

The figure consists of seven sub-diagrams arranged horizontally, each showing a path \$P\$ and its modification to form a new path \$P'\$.

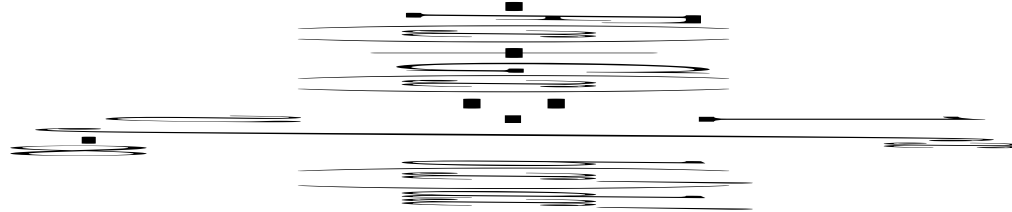
- Diagram 1:** Shows a path \$P\$ with several segments. A specific segment is highlighted in thick black.
- Diagram 2:** The highlighted segment from Diagram 1 is now part of a larger black segment in \$P'\$.
- Diagram 3:** Another segment of \$P\$ is highlighted in thick black.
- Diagram 4:** This highlighted segment is integrated into the growing black segment of \$P'\$.
- Diagram 5:** A third segment of \$P\$ is highlighted in thick black.
- Diagram 6:** This segment is also integrated into the black segment of \$P'\$.
- Diagram 7:** The final diagram shows the complete path \$P'\$, which has been constructed by replacing segments of \$P\$. The original path \$P\$ is shown in thin lines, and the new path \$P'\$ is shown in thick black lines.

$$\left. \begin{aligned} \text{Point} &= 0 \text{ on } x \\ \text{Point} &= 1 \text{ on } x \end{aligned} \right\} \begin{aligned} f(x) + G(x) &= g(x) \\ f(x) + G(x) &= g(x) \end{aligned}$$

6

Propagation le long d'une corde

Intégrons la 2^{de} relation

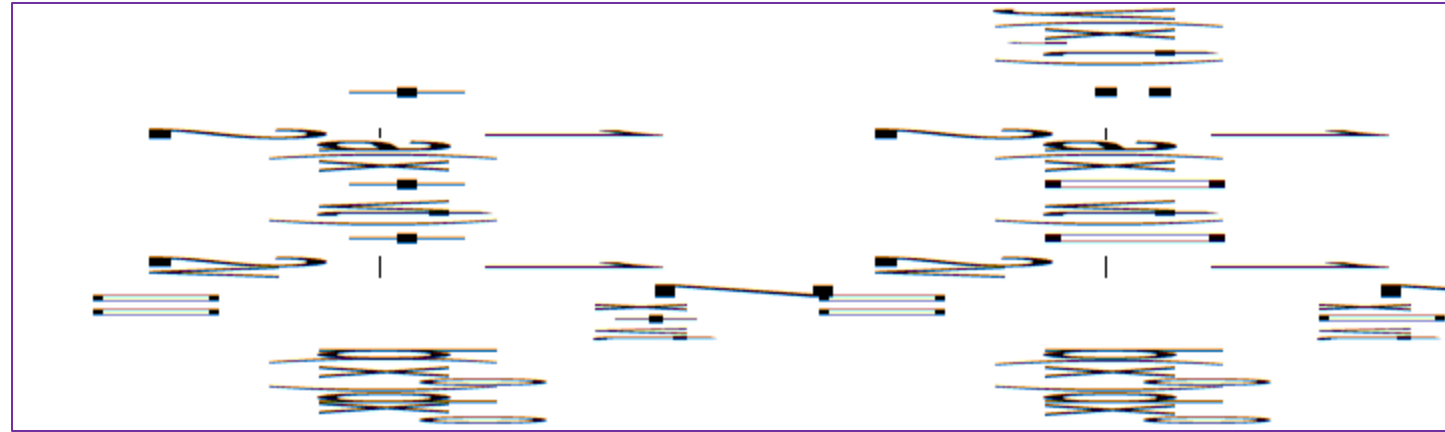


On en déduit F et G par addition/soustraction

$$\left\{ \begin{array}{l} F(\omega) = \frac{1}{2} a(\omega) - \frac{1}{2\omega} \int_{-\infty}^{\omega} b(\omega') d\omega' \\ G(\omega) = \frac{1}{2} a(\omega) + \frac{1}{2\omega} \int_{-\infty}^{\omega} b(\omega') d\omega' \end{array} \right.$$

Propagation le long d'une corde

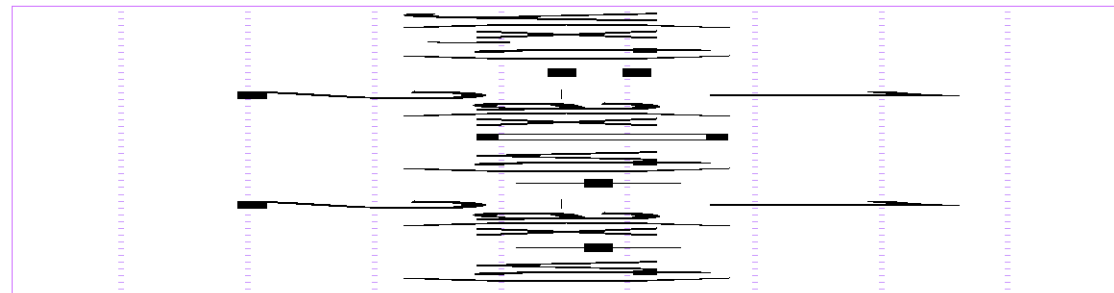
D'où



⇒ 2 ondes se propagent en **sens inverse**

⇒ **Sans vitesse initiale** ($b(x)=0$), même forme que la déformation initiale mais d'amplitude moitié

Soit



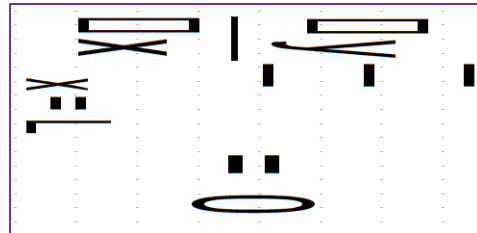
Conditions aux limites

3) Conditions aux limites :

Extrémité libre: Aucune condition sur y , mais sur sa dérivée



Si l'extrémité est libre, il n'y a aucune force appliquée



L'onde réfléchie conserve la même amplitude et la même phase

Conditions aux limites

Extrémité fixe:

Pour une corde fixe au point x_L , on a



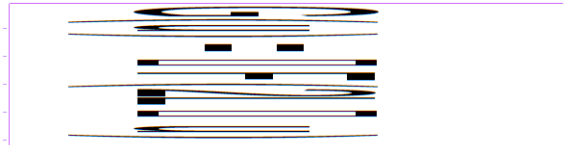
Soit



Posons



la relation s'écrit alors



L'onde réfléchie G est alors donnée par



Conditions aux limites

Corde fixe aux deux extrémités:

Considérons une corde de longueur L fixe aux points $x = 0$ et $x = L$

alors $y(x_L, t) = 0$

On a vu que $G(x + vt) = -F(2L - x - vt)$

donc $y(x, t) = F(x - vt) - F(2L - x - vt)$

De plus,

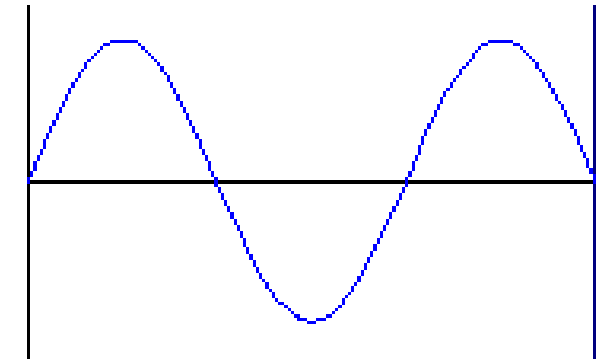
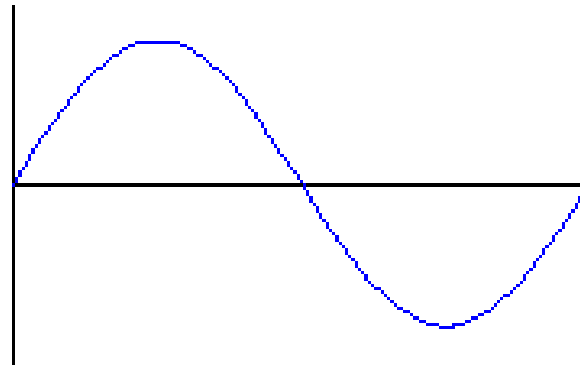
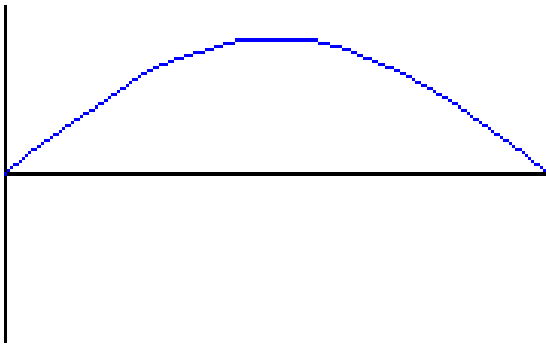
$$y(x = 0, t) = 0 \Rightarrow F(-vt) - F(2L - vt) = 0 \quad \forall t$$

On en déduit ainsi que la fonction F est **périodique** de période $T = 2L/v$

Conditions aux limites

$$F(-vt) = F(2L - vt)$$

Il ne peut exister que des vibrations transversales périodiques en t , de période $T = 2L/v$



Analyse spectrale

II– Décomposition en série de Fourier :

Toute fonction périodique de période T peut se décomposer sous la forme d'une somme de *sin* et *cos* (Théorème de la série de Fourier)

⇒ On va exprimer $f(u)$, u homogène à un temps

1) Changement de variable :

Si $f(u) = F(x+vt) + G(x-vt)$ est solution alors $f(\alpha u)$ est aussi solution (équation d'onde est **linéaire**)

Choisissons $\alpha = 1/v$, on peut alors écrire:

$$f(u) = F_2(t - x/v) + G_2(t + x/v)$$

(*démo tableau*)

Dans le cas où la corde est fixe aux 2 extrémités, $G_2 = -F_2$
et $f(u)$ s'écrit:

$$f(x, t) = F_2(t - x/v) - F_2(t + x/v)$$

Modes propres et résonance

2) Théorème de la série de Fourier :

La décomposition est de la forme:

$$f(u) = A_0 + \sum_{m=1}^{\infty} \left[A_m \cos \left(\frac{m2\pi u}{T} \right) + B_m \sin \left(\frac{m2\pi u}{T} \right) \right]$$

$$A_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(u) du = 0 \quad (\text{valeur moyenne de } f(u))$$

...(démonstration tableau)

Après manipulation, l'expression complète de f est de la forme:

$$f(x, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \left[a_m \cos \left(\frac{m\pi vt}{L} \right) + b_m \sin \left(\frac{m\pi vt}{L} \right) \right] \sin \left[\frac{m\pi x}{L} \right]$$

Modes propres et résonance

3) Modes propres de vibration de la corde :

Considérons un terme de la somme précédente:

$$\begin{aligned} f_m(x, t) &= \left[a_m \cos \left(\frac{m\pi vt}{L} \right) + b_m \sin \left(\frac{m\pi vt}{L} \right) \right] \sin \left[\frac{m\pi x}{L} \right] \\ &= C_m \cos (\omega_m t + \phi_m) \sin (k_m x) \end{aligned}$$

$$\text{où on a posé } \omega_m = \frac{m\pi v}{L} \text{ et } k_m = \frac{m\pi}{L}$$

Cette perturbation est donc une onde stationnaire qu'on appelle **mode propre** de vibration de la corde

Modes propres et résonance

Les nœuds de vibration sont les points d'amplitude nulle $x_n = \frac{nL}{m}$

avec $n=1,2,\dots,m-1$ séparés par

$$\frac{\lambda_m}{2} = \frac{L}{m}$$

- Pour $m=1$ (**mode fondamental**), il n'y a pas de nœud
- Pour $m>1$, le nombre de nœuds est $m-1$

3 premiers modes propres de vibration d'une corde



Modes propres et résonance

4) Décomposition d'un mode en ondes progressives :

L'expression précédente en notation complexe ($\sim$)

$$\begin{aligned} f(x, t) &= \tilde{C}'_m e^{-i\omega_m t} \sin(k_m x) \\ &= \tilde{C}_m \left[e^{-i(\omega_m t - k_m x)} - e^{-i(\omega_m t + k_m x)} \right] \end{aligned}$$



Les modes propres d'une corde correspondent à la superposition de 2 ondes progressives se propageant dans des directions opposées

Propriétés: même fréquence
 même amplitude
 en opposition de phase

Analyse spectrale

5) Conditions initiales du mouvement :

Les coefficients a_m et b_m sont déterminés par les **conditions initiales** du mouvement

Supposons qu'à $t = 0$ nous imposons à la corde une certaine forme et une vitesse

$$\text{On obtient } \begin{cases} f(x, t = 0) = \sum_{m=1}^{\infty} a_m \sin(k_m x) = f_0(x) \\ \text{et } \left. \frac{\partial f}{\partial t} \right|_{t=0} = \sum_{m=1}^{\infty} b_m \omega_m \sin(k_m x) = \dot{f}_0(x) \end{cases}$$

Il faut **inverser les équations** pour déterminer a_m et b_m

Analyse spectrale

Analyse de Fourier: $\Rightarrow$ on multiplie les équations par $\sin(k_n x)$
 $\Rightarrow$ on intègre entre 0 et L

En sachant que

$$\int_0^L \sin \left[\frac{m\pi x}{L} \right] \sin \left[\frac{n\pi x}{L} \right] dx = \begin{cases} \frac{L}{2} & \text{si } n = m \\ 0 & \text{si } n \neq m \end{cases}$$

(démonstration tableau)

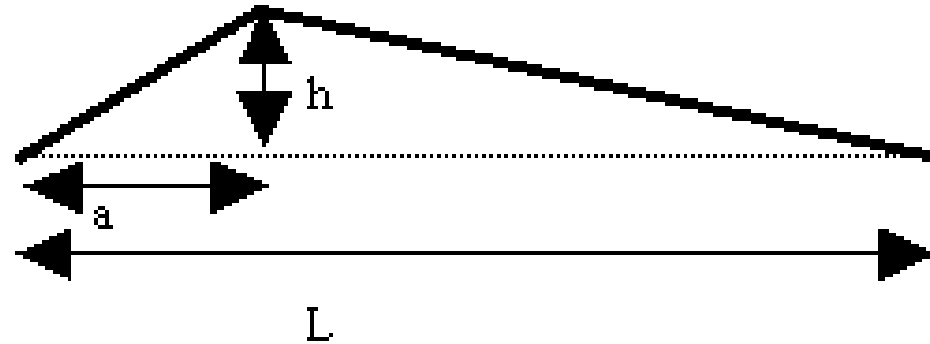
On obtient ainsi

$$\begin{cases} a_m = \frac{2}{L} \int_0^L f_0(x) \sin \left[\frac{m\pi x}{L} \right] dx \\ b_m = \frac{2}{m\pi v} \int_0^L \dot{f}_0(x) \sin \left[\frac{m\pi x}{L} \right] dx \end{cases}$$

Analyse spectrale: corde pincée

6) Cas d'une corde pincée (guitare):

La corde est pincée et lâchée. On a alors une vitesse initiale nulle et une position initiale non nulle :



Définition de la fonction initiale :

$$\begin{cases} f_0(x) = h \frac{x}{a} & \text{si } 0 \leq x < a \\ f_0(x) = h \frac{L-x}{L-a} & \text{si } a < x \leq L \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{f}_0(x) = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad b_m = 0$$

Analyse spectrale: corde pincée

$$a_m = \frac{2}{L} \int_0^a \frac{h}{a} x \sin \left[\frac{m\pi x}{L} \right] dx + \frac{2}{L} \int_a^L h \frac{(L-x)}{(L-a)} \sin \left[\frac{m\pi x}{L} \right] dx$$

On intègre par parties:

(démonstration tableau)

$$a_m = \frac{2hL^2}{\pi^2 a(L-a)} \frac{1}{m^2} \sin \left[\frac{m\pi a}{L} \right] = \frac{K}{m^2}$$

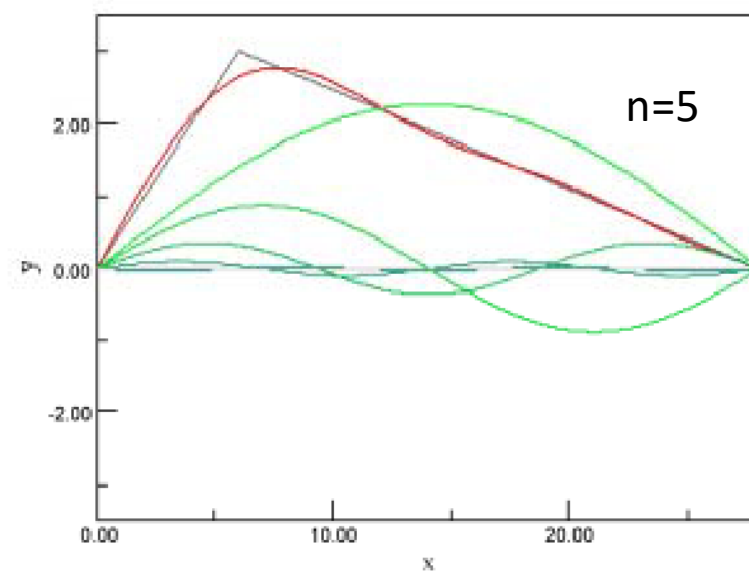
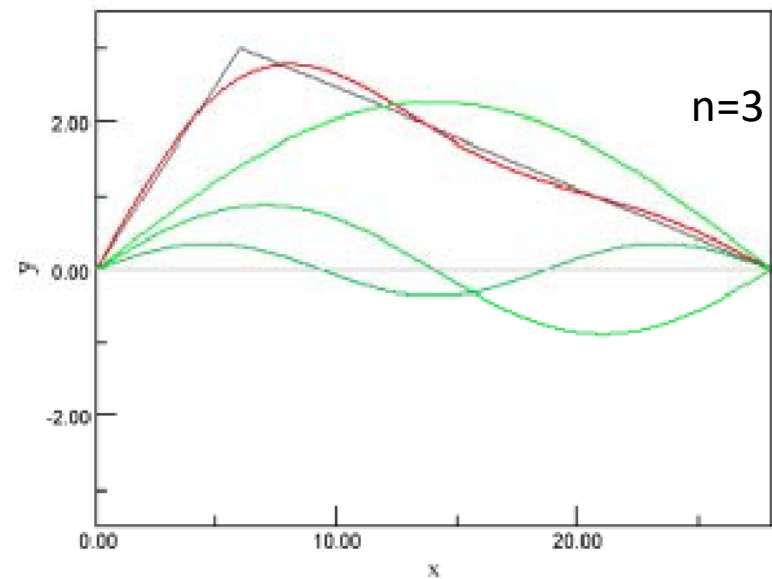
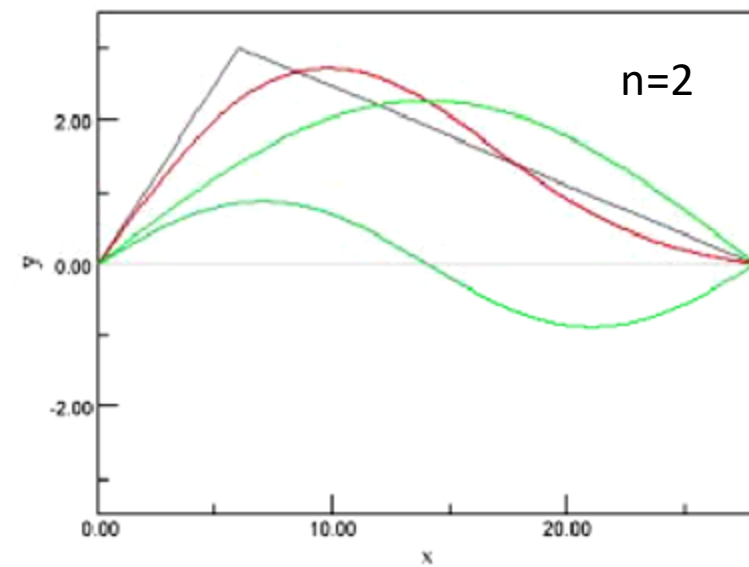
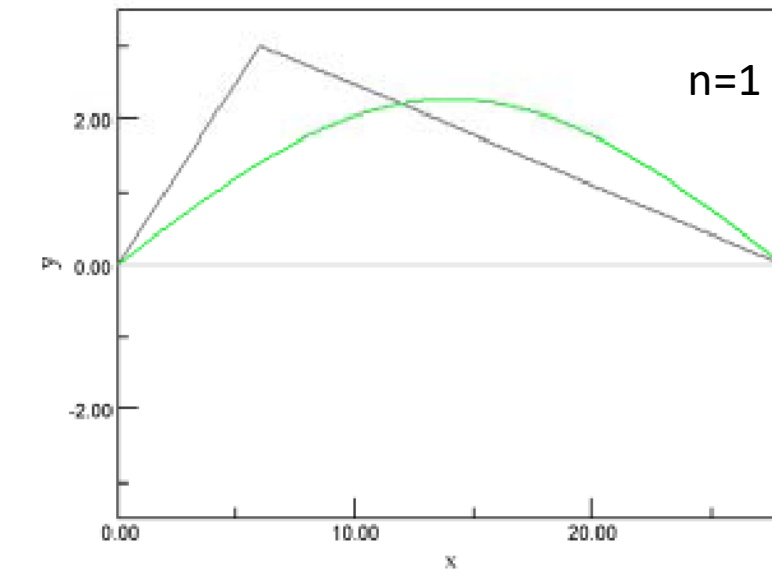
Les harmoniques décroissent en amplitude comme $\frac{1}{m^2}$

⇒ Il y a peu d'harmoniques dans le son perçu

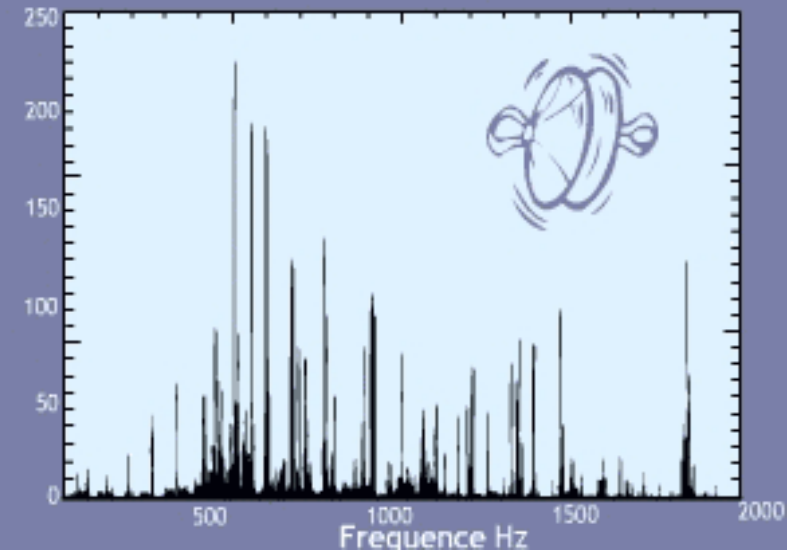
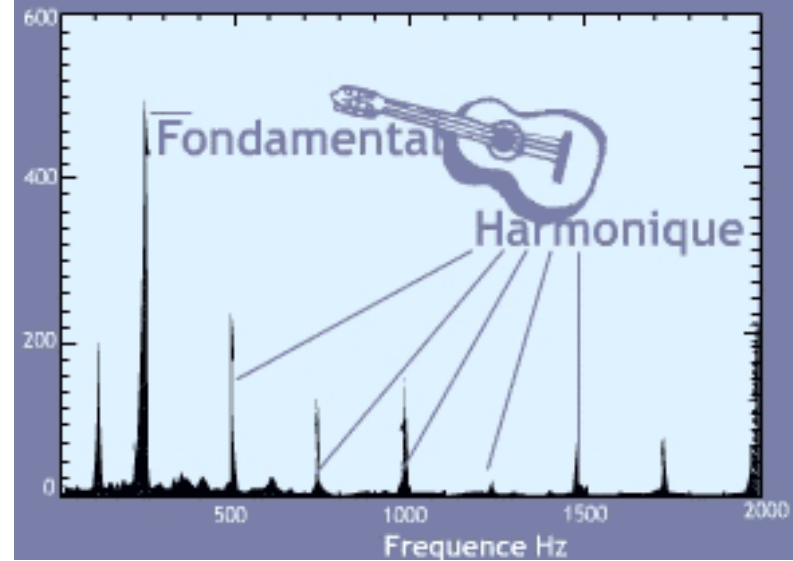
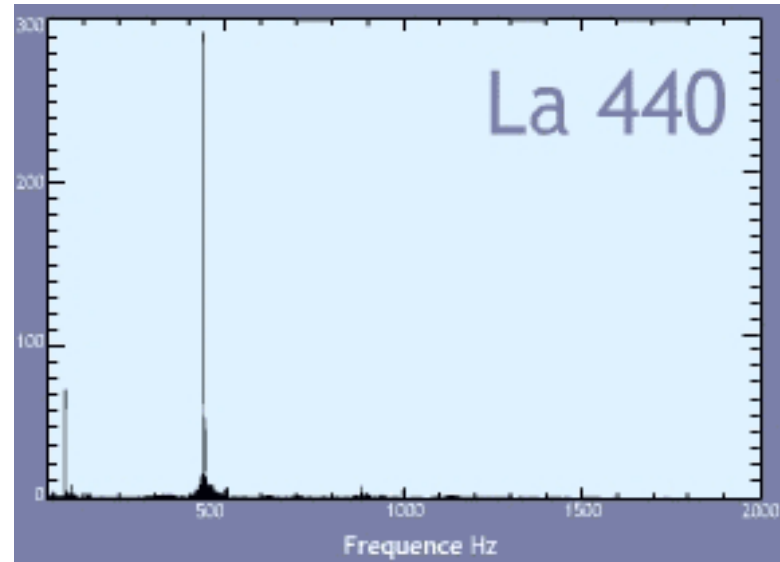
⇒ on peut supprimer l'harmonique de rang m en pinçant en un point tel que

$$\sin \frac{m\pi a}{L} = 0 \Rightarrow a = \frac{L}{m}$$

Analyse spectrale: corde pincée



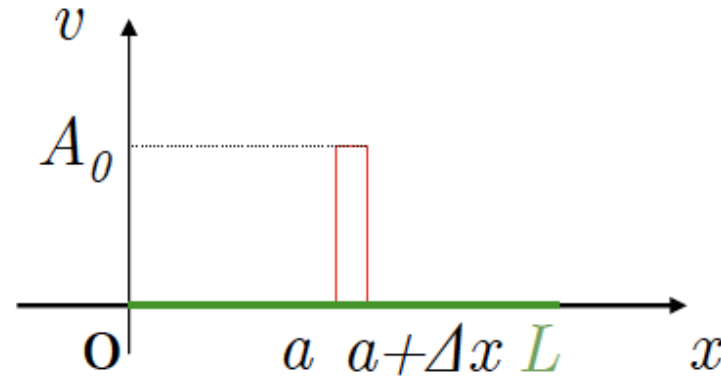
Analyse spectrale



Analyse spectrale: corde frappée

7) Cas d'une corde frappée (piano):

A l'instant $t = 0$ la corde au repos est frappée au point $x = a$ avec un marteau de largeur Δx :



On supposera $\Delta x \ll a$ et $\Delta x \ll L - a$. On admettra les conditions initiales simplifiées suivantes:

$$\left\{ \begin{array}{l} f_0(x) = 0 \\ \dot{f}_0(x) = A_0 \text{ si } a \leq x \leq a + \Delta x \\ \dot{f}_0(x) = 0 \text{ si } x < a, \quad x > a + \Delta x \end{array} \right. \Rightarrow a_m = 0$$

Analyse spectrale: corde frappée

$$b_m = \frac{2A_0}{m\pi v} \int_a^{a+\Delta x} \sin \frac{m\pi x}{L} dx$$

On considère que le $\sin$ varie peu sur l'intervalle $[a, a + \Delta x]$
d'où

$$\begin{aligned} \int_a^{a+\Delta x} \sin \frac{m\pi x}{L} dx &\simeq \sin \frac{m\pi a}{L} \int_a^{a+\Delta x} dx \\ &= \sin \left[\frac{m\pi a}{L} \right] \Delta x \end{aligned}$$

et ainsi

$$b_m = \frac{2A_0 \sin \left[\frac{m\pi a}{L} \right] \Delta x}{m\pi v}$$

b_m décroît beaucoup moins vite en fonction de m
 $\Rightarrow$ plus d'harmoniques présentes

La dispersion

III– Phénomène de dispersion :

1) vitesse de phase:

Considérons une onde progressive sinusoïdale décrite par

$$f = A \exp[i(kx - \omega t)]$$

En un point M d'abscisse x , l'état de l'onde en *état vibratoire* à l'instant t est défini par la valeur de la phase

$$\phi = kx - \omega t$$

On en déduit qu'une modification infinitésimale de l'état vibratoire s'écrit

$$\Rightarrow d\phi = kdx - \omega dt$$

La dispersion

L'état vibratoire ou la phase reste identique si $d\phi = 0$

Soit
$$kdx - \omega dt = 0 \Rightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{k}$$

La phase de l'onde se propage donc à la vitesse dite **vitesse de phase**

$$v_{\phi} = \frac{\omega}{k}$$

Si la relation entre k et ω n'est pas linéaire, la vitesse de phase dépend de ω :
= phénomène de dispersion

En fait l'onde monochromatique représente un cas limite idéal qui ne correspond jamais à la réalité

Paquet d'ondes et vitesse de groupe

2) vitesse de groupe:

Tous les signaux réels ont une durée finie



Ils peuvent être considérés comme une **superposition d'ondes sinusoïdales** de différentes pulsations ω

Dans le cas d'un milieu dispersif (cas d'une dispersion non linéaire), on applique une **transformation de Fourier**

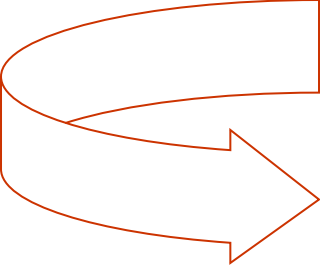
Pour ω donné, composante de Fourier se propage à la vitesse caractéristique $v_\phi(\omega)$

⇒ Vitesse de propagation du signal total **non triviale**

Paquet d'ondes et vitesse de groupe

Hypothèse: Composantes sinusoïdales de pulsations proches de la pulsation centrale ω_0

La fonction d'onde peut s'écrire


$$F(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(\omega) e^{i(kx - \omega t)} d\omega$$

où $|g(\omega)|$ ne prend de valeurs non nulles qu'au voisinage proche de ω_0

D.L. au 1^{er} ordre de la relation de dispersion

$$k(\omega) \simeq k(\omega_0) + (\omega - \omega_0) \left. \frac{dk}{d\omega} \right|_{\omega=\omega_0}$$

on pose $k(\omega_0) = k_0$

Paquet d'ondes et vitesse de groupe

On reporte l'expression précédente dans $F(x,t)$

$$F(x, t) = \frac{e^{i(k_0 x - \omega_0 t)}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(\omega) e^{i(\omega - \omega_0)[(dk/d\omega)_0 x - t]} d\omega$$

Onde de **pulsation** ω_0 avec $v_\phi = \frac{\omega_0}{k_0}$ et dont l'**amplitude** est aussi fonction de x et t

$F(x,t)$ est une fonction de la combinaison linéaire $(x/v_g t)$

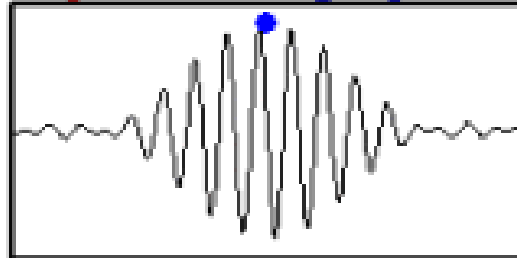
où on a posé

$$v_g = \left(\frac{d\omega}{dk} \right)_0$$

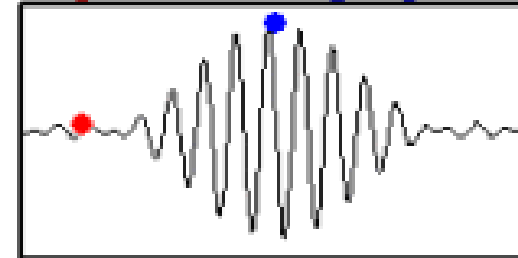
L'enveloppe de l'onde représentée par $F(x,t)$ se propage sans déformation à la
vitesse de groupe $v_g(\omega_0)$

Paquet d'ondes et vitesse de groupe

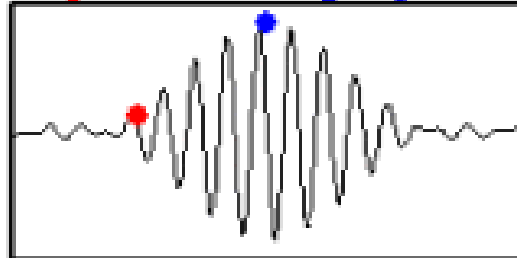
phase vel. = group vel.



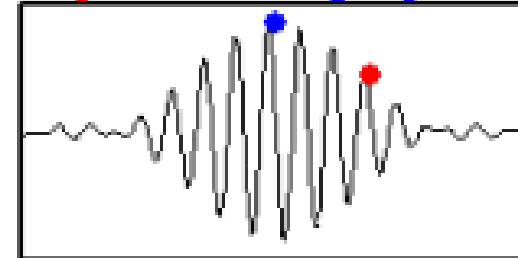
phase vel. = - group vel.



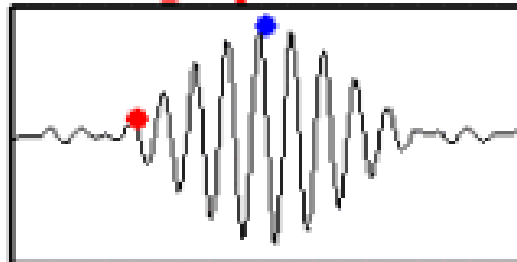
phase vel. > group vel.



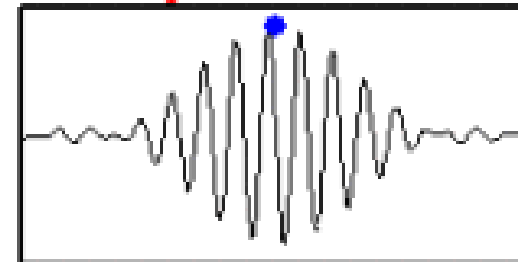
phase vel. < group vel.



group vel. = 0

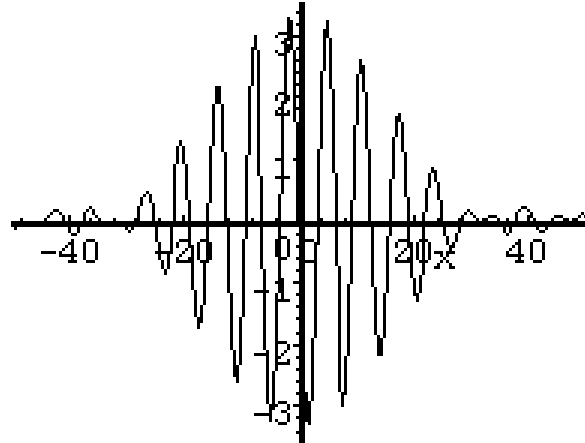


phase vel. = 0

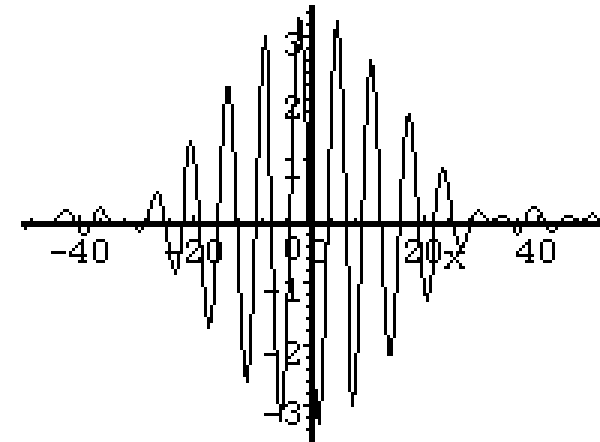


Paquet d'ondes et vitesse de groupe

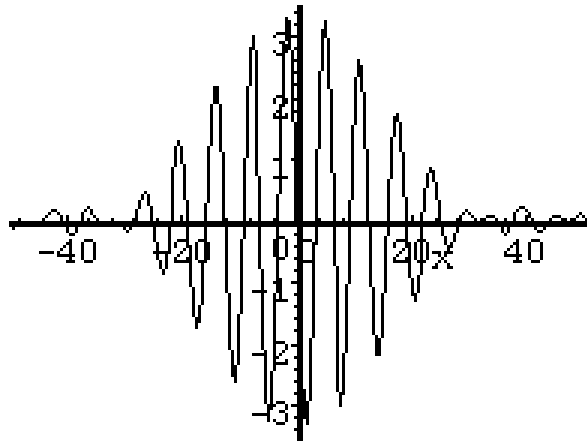
$$v_{\phi} = v_G$$



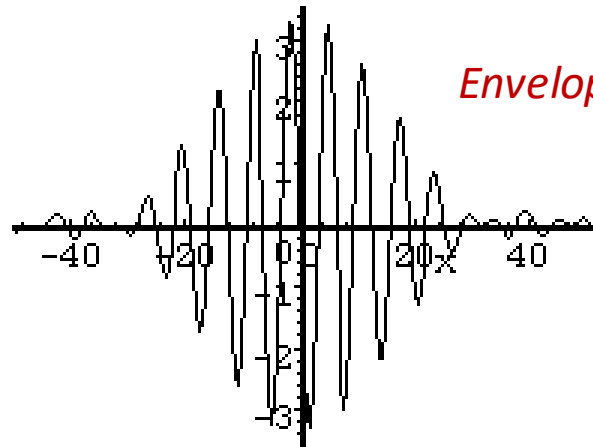
$$v_{\phi} \geq v_G$$



$$v_{\phi} \leq v_G$$

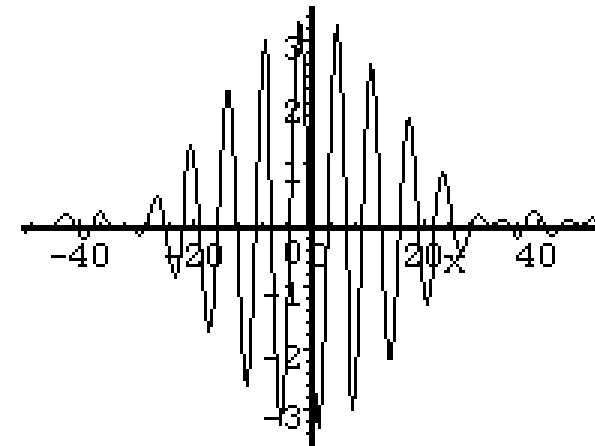


Paquet d'ondes et vitesse de groupe



Enveloppe stationnaire

*Ondes stationnaires
mais pas l'enveloppe*



*Enveloppe se déplace dans la direction
opposée aux ondes qui la composent*

