

Retour sur les ondes EM

I – Equations de Maxwell dans le vide:

1/ EM avec charge et courant :

$\overrightarrow{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$	ou	$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$	Equation de Maxwell-Faraday
$\overrightarrow{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$	ou	$\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$	Equation de Maxwell-Ampère
$div \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$	ou	$\vec{\nabla} \bullet \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$	Equation de Maxwell-Gauss
$div \vec{B} = 0$	ou	$\vec{\nabla} \bullet \vec{B} = 0$	Conservation du flux

ϵ_0 Permittivité électrique du vide μ_0 Perméabilité magnétique du vide

Retour sur les ondes EM

2/ EM sans charge ni courant :

Si maintenant on se place loin des zones de charges ($\rho=0$) et des sources de courant ($\mathbf{j}=0$) :

Simplification



$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \end{array} \right.$$

Les deux premières équations sont couplées. Prenons par exemple le rotationnel de la première équation :



$$\vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{E}) = \vec{\nabla} \wedge \left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) = -\frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \wedge \vec{B})$$

Retour sur les ondes EM

A l'aide de la deuxième équation de Maxwell on peut écrire :

$$\left. \begin{aligned} \vec{\nabla} \wedge \vec{B} &= \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{E}) &= -\frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \wedge \vec{B}) \end{aligned} \right\} \vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{E}) = -\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

Si maintenant on utilise les relations existantes entre les différents opérateurs vectoriels :

$$\Delta \vec{A} = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \vec{A} = \vec{\nabla}^2 \vec{A} = \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div } \vec{A}) - \vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{A})$$


$$\vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{E}) = \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div } \vec{E}) - \vec{\nabla}^2 \vec{E} = -\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

Equation de Propagation

On sait que : $\vec{\nabla} \bullet \vec{E} = 0$


$$\Delta \vec{E} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \quad \text{On obtient finalement une équation ne contenant que } \vec{E}.$$

$$\Delta \vec{E} - \frac{1}{C^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$$

$$\text{Avec } C = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$$

Retour sur les ondes EM

Propriétés d'une onde e.m **plane sinusoïdale monochromatique** (un seul λ) :
 $(\vec{E}_0, \vec{B}_0, \vec{k})$ trièdre direct :

En partant de l'expression $\vec{E}_0 e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}$

- $\text{div} \vec{E} = 0 \Rightarrow -i\vec{k} \cdot \vec{E} = 0 \Rightarrow \vec{k} \perp \vec{E}$
- $\text{div} \vec{B} = 0 \Rightarrow -i\vec{k} \cdot \vec{B} = 0 \Rightarrow \vec{k} \perp \vec{B}$
- $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Rightarrow -i\vec{k} \wedge \vec{E} = -i\omega \vec{B} \Rightarrow \vec{k} \wedge \vec{E} = \omega \vec{B}$
- $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \Rightarrow \vec{k} \wedge \vec{B} = -\omega \varepsilon_0 \mu_0 \vec{E} = -\frac{\omega}{c^2} \vec{E}$

Retour sur les ondes EM

Considérons des champs EM complexes correspondant à une onde plan progressive monochromatique :

$$\underline{\vec{E}}(x, y, z, t) = \underline{\vec{E}}_0 e^{j(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} \quad \underline{\vec{B}}(x, y, z, t) = \underline{\vec{B}}_0 e^{j(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}$$

En exprimant les opérateurs de dérivation on a :

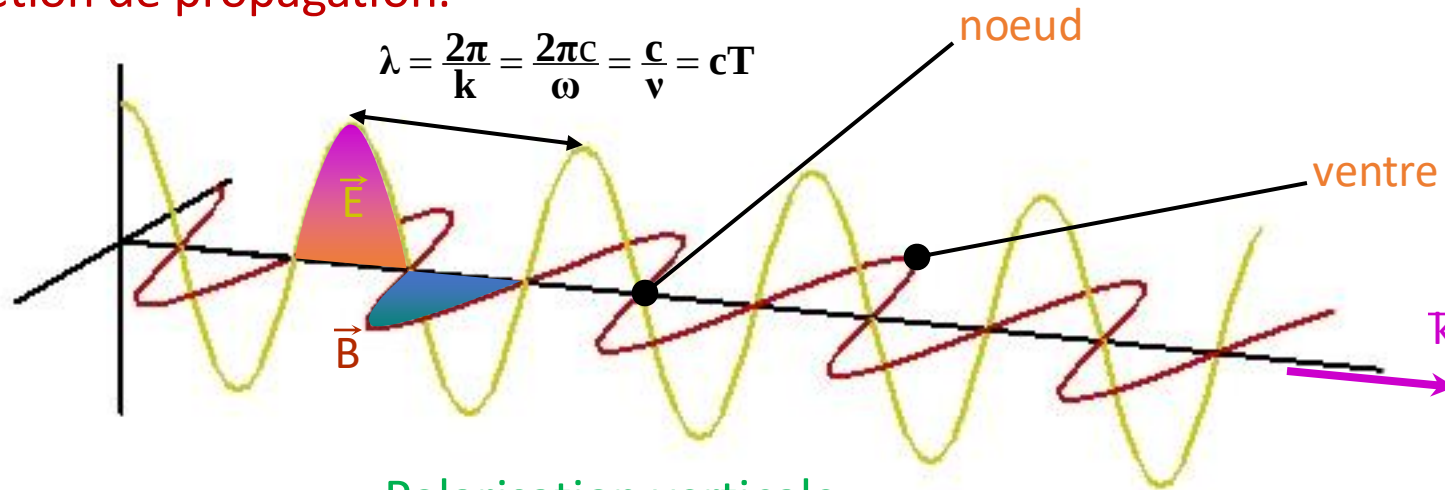
$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega} \\ \vec{E} = -\frac{C^2 \vec{k} \wedge \vec{B}}{\omega} \\ \vec{k} \cdot \vec{E} = 0 \\ \vec{k} \cdot \vec{B} = 0 \end{array} \right.$$

- Les deux champs sont en phase
- Les deux champs sont orthogonaux au vecteur d'onde $\mathbf{k} \Rightarrow$ Onde transverse
- $(\vec{k}, \vec{E}, \vec{B})$ forme un trièdre directe
- Les modules des champs sont proportionnels $\Rightarrow \frac{|\vec{E}|}{|\vec{B}|} = C$

Particularités des ondes EM

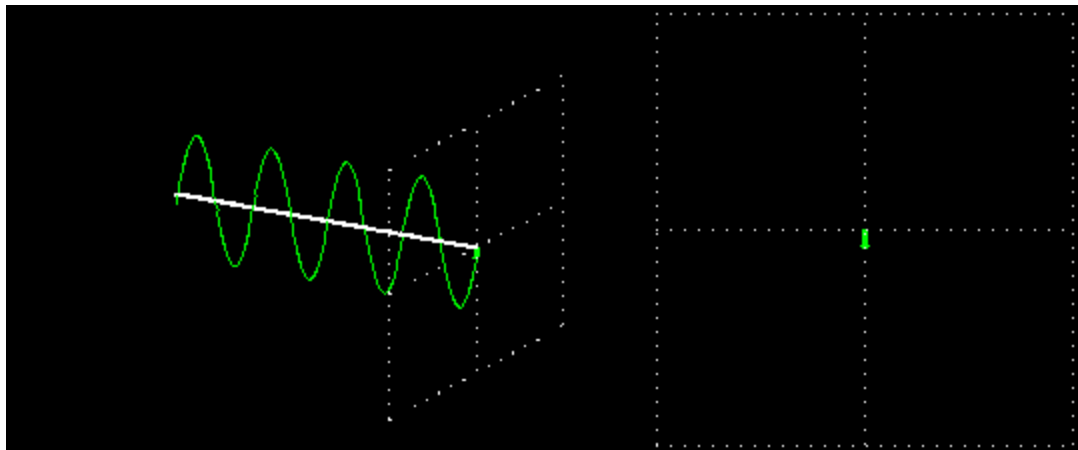
3/ La notion de polarisation:

Le champ électrique se propage perpendiculairement au champ magnétique et à la direction de propagation:

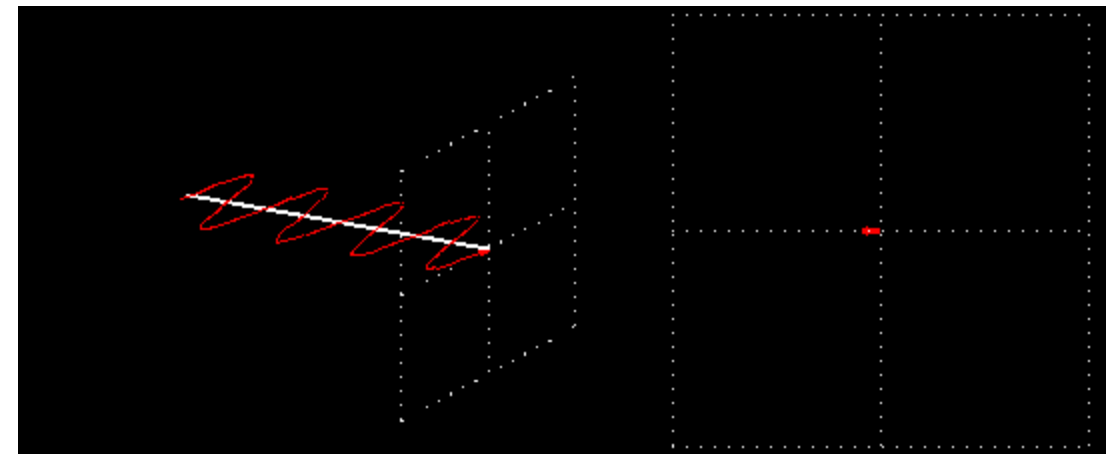


2 polarisations
« linéaires »
possibles

Polarisation verticale



Polarisation horizontale

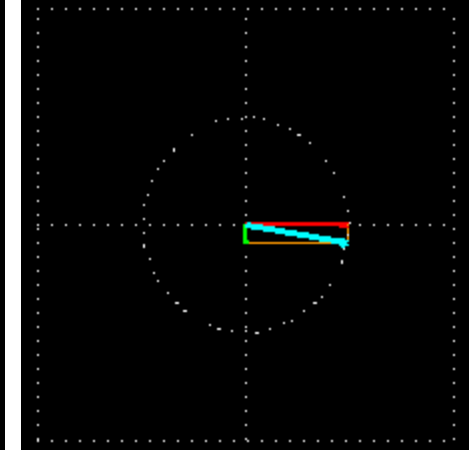
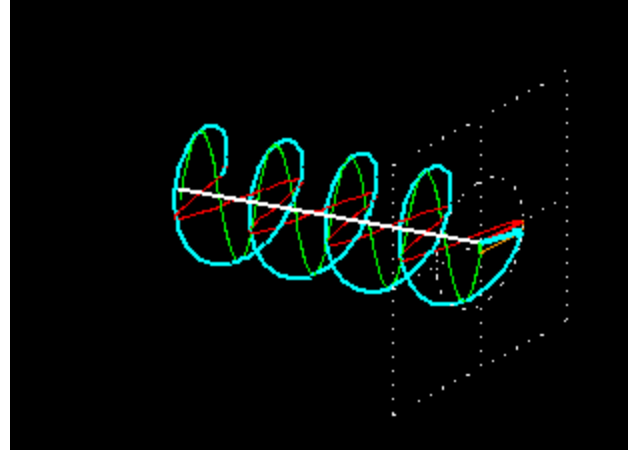


Superposition de composantes de polarisation

Exemple de polarisation circulaire

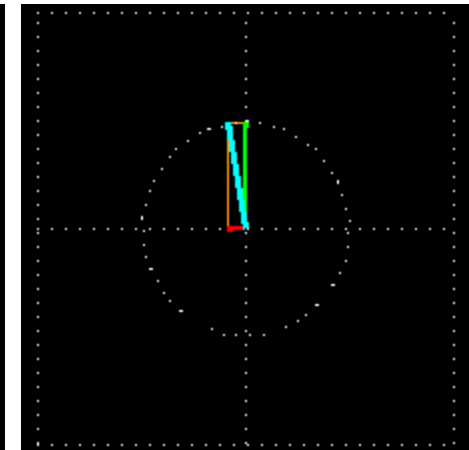
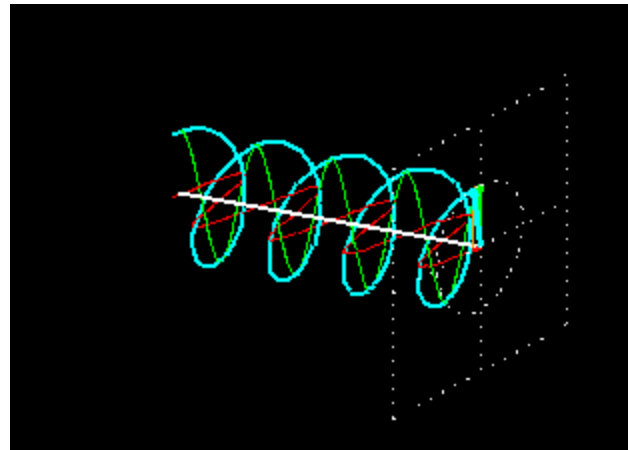
Droite

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} E_{0x} \cos(\omega t - kz) \\ E_{0y} \cos(\omega t - kz + \frac{\pi}{2}) \\ 0 \end{pmatrix}$$



Gauche

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} E_{0x} \cos(\omega t - kz) \\ E_{0y} \cos(\omega t - kz - \frac{\pi}{2}) \\ 0 \end{pmatrix}$$



Polarisation des ondes EM

La polarisation définit l'orientation du champ électrique dans le temps.

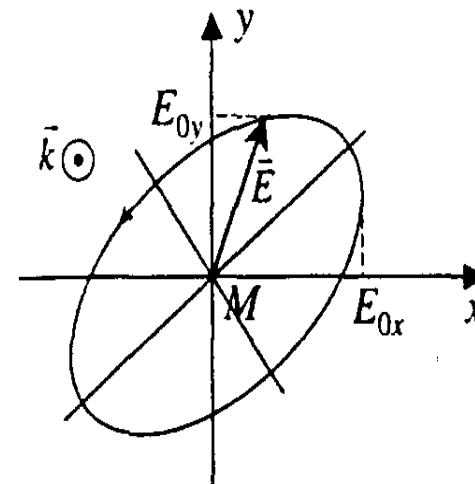
- Polarisation rectiligne ou linéaire
- Polarisation elliptique
- Polarisation circulaire
- Sans polarisation : La lumière naturelle

(démonstration tableau)

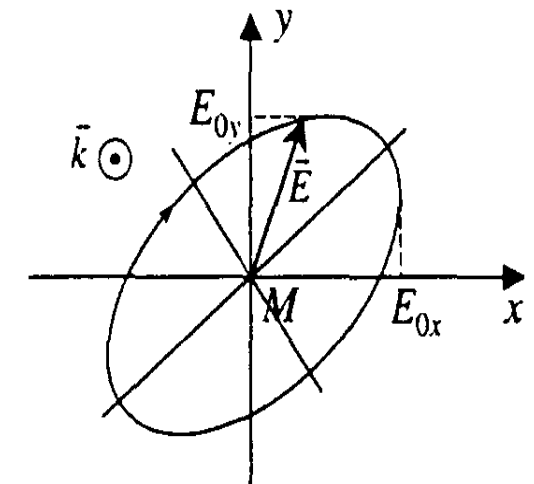
On sait que le champ électrique est transverse :

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} E_{0x} \cos(\omega t - kz) \\ E_{0y} \cos(\omega t - kz + \Phi) \\ 0 \end{pmatrix}$$

avec $\Phi = \phi_y - \phi_x$



Polarisation
elliptique gauche



Polarisation
elliptique droite

Polarisation des ondes EM

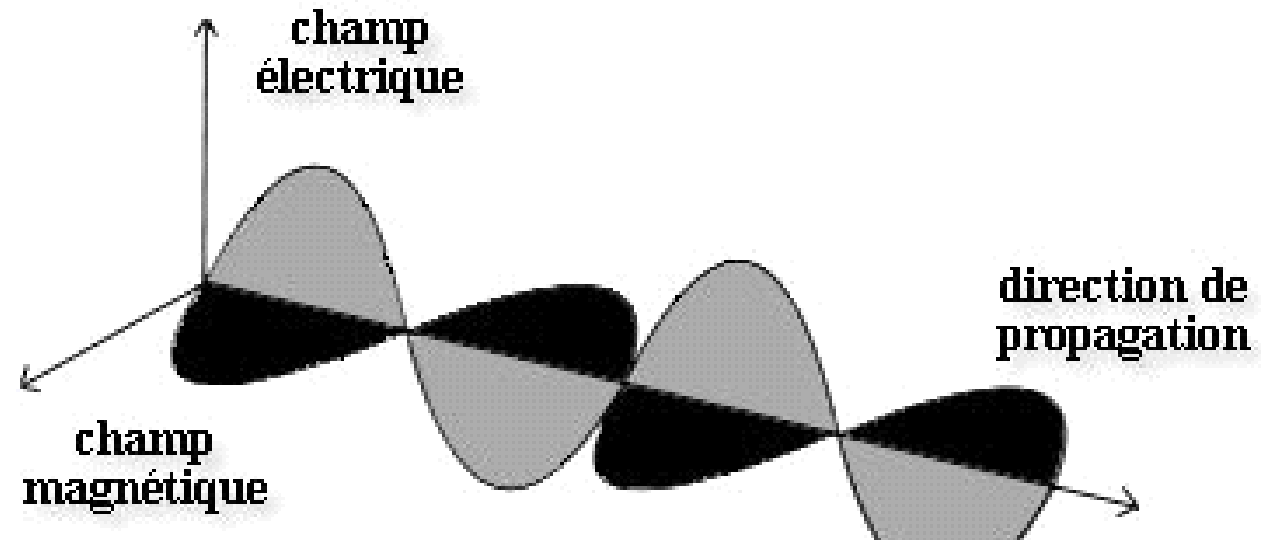
Polarisation rectiligne ou linéaire

C'est un cas particulier de la polarisation elliptique, on a ici :

$$\Phi = 0$$

ou

$$\Phi = \pi$$



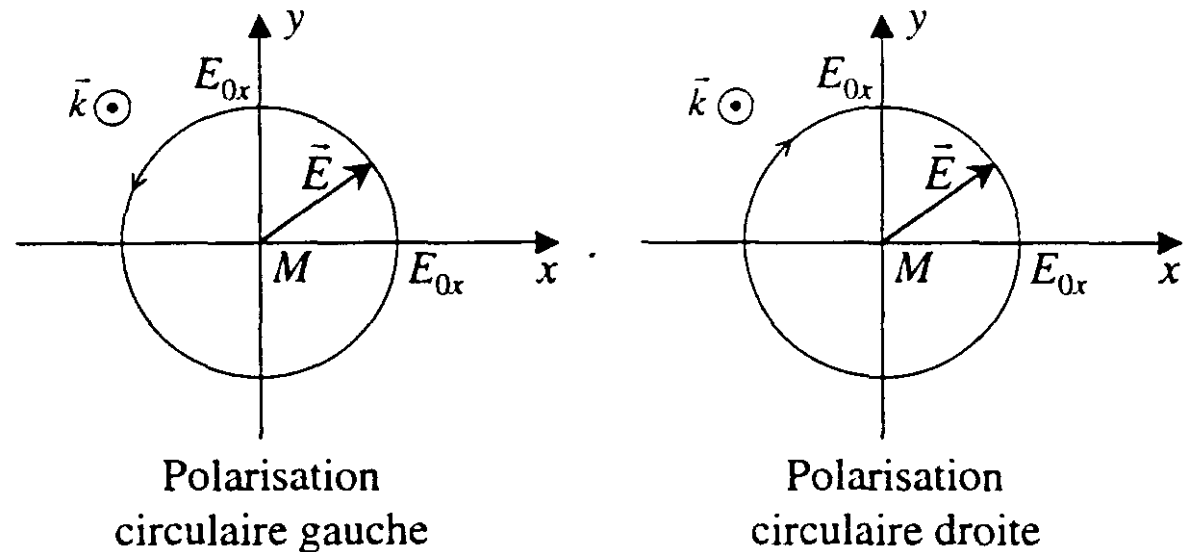
Polarisation circulaire

C'est un cas particulier de la polarisation elliptique, on a ici :

$$\Phi = \pm \frac{\pi}{2}$$

+ : polarisation droite
- : polarisation gauche

$$E_{0x} = E_{0y}$$



Propagation de l'énergie EM

II – Définition de l'énergie propagée:

1/ Le vecteur de Poynting:

La puissance **P** transportée par un champ électromagnétique à travers une surface **S** est le flux du vecteur de Poynting définis par:

$$\vec{\Pi} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \wedge \vec{B}$$

$$P = \int_S \vec{\Pi} \cdot d\vec{S}$$

Exemple d'une onde plane

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} E_{0x} \cos(\omega t - kz + \phi_x) \\ E_{0y} \cos(\omega t - kz + \phi_y) \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{B} = \frac{\vec{u}_z \wedge \vec{E}}{C} = \frac{1}{C} \begin{pmatrix} -E_{0y} \cos(\omega t - kz + \phi_y) \\ E_{0x} \cos(\omega t - kz + \phi_x) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{avec} \quad \vec{k} = k\vec{u}$$

Propagation de l'énergie EM

Déterminons maintenant l'expression du vecteur de Poynting

$$\vec{\Pi} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \wedge \vec{B} = \frac{1}{C\mu_0} \begin{vmatrix} E_{0x} \cos(\omega t - kz + \phi_x) & -E_{0y} \cos(\omega t - kz + \phi_y) \\ E_{0y} \cos(\omega t - kz + \phi_y) & E_{0x} \cos(\omega t - kz + \phi_x) \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$$
$$\vec{\Pi} = \frac{1}{C\mu_0} \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ [E_{0x} \cos(\omega t - kz + \phi_x)]^2 + [E_{0y} \cos(\omega t - kz + \phi_y)]^2 \end{vmatrix}$$

$$\vec{\Pi} = \frac{1}{C\mu_0} \left\{ E_{0x}^2 \cos^2(\omega t - kz + \phi_x) + E_{0y}^2 \cos^2(\omega t - kz + \phi_y) \right\} \vec{u}_z$$

La moyenne temporelle est égale à :

$$\overline{\vec{\Pi}} = \frac{E_{0x}^2 + E_{0y}^2}{2C\mu_0} \vec{u}_z = \frac{\overline{E^2}}{C\mu_0} \vec{u}_z \quad \text{ou encore} \quad \overline{\vec{\Pi}} = C \frac{\overline{B^2}}{\mu_0} \vec{u}_z$$

Remarque : Deux ondes polarisées dans des directions orthogonales n'interfèrent pas. La puissance totale est donc obtenue par la somme des carrés des amplitudes des composantes

Propagation de l'énergie EM

2/ Densité locale d'énergie électromagnétique:

Appliquons l'opérateur divergence au vecteur de Poynting

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\mathbf{E}} \wedge \vec{\mathbf{B}}) = \vec{\mathbf{B}} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{\mathbf{E}}) - \vec{\mathbf{E}} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{\mathbf{B}})$$

En injectant les équation de Maxwell $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\mathbf{E}} \wedge \vec{\mathbf{B}}) = \vec{\mathbf{B}} \cdot \left(-\frac{\partial \vec{\mathbf{B}}}{\partial t} \right) - \vec{\mathbf{E}} \cdot \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{\mathbf{E}}}{\partial t} \right)$

Ou encore $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\mathbf{E}} \wedge \vec{\mathbf{B}}) = -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\mathbf{B}} \cdot \vec{\mathbf{B}} + \epsilon_0 \mu_0 \vec{\mathbf{E}} \cdot \vec{\mathbf{E}})$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{P}} = \vec{\nabla} \cdot \left(\vec{\mathbf{E}} \wedge \frac{\vec{\mathbf{B}}}{\mu_0} \right) = -\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \frac{\mathbf{B}^2}{\mu_0} + \frac{1}{2} \epsilon_0 \mathbf{E}^2 \right)$$

Densité d'énergie magnétostatique

Densité d'énergie électrostatique

$$\frac{dW_m}{d^3r} = \frac{1}{2} \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B}^2$$

$$\frac{dW_e}{d^3r} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2$$

Propagation de l'énergie EM

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\Pi} = \vec{\nabla} \cdot \left(\vec{\mathbf{E}} \wedge \frac{\vec{\mathbf{B}}}{\mu_0} \right) = - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \frac{\mathbf{B}^2}{\mu_0} + \frac{1}{2} \epsilon_0 \mathbf{E}^2 \right)$$

La divergence du *vecteur de Poynting* est donc égale à l'opposé du taux de variation de la densité locale d'énergie électromagnétique:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\Pi} = - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{dW_{em}}{d^3r} \right)$$

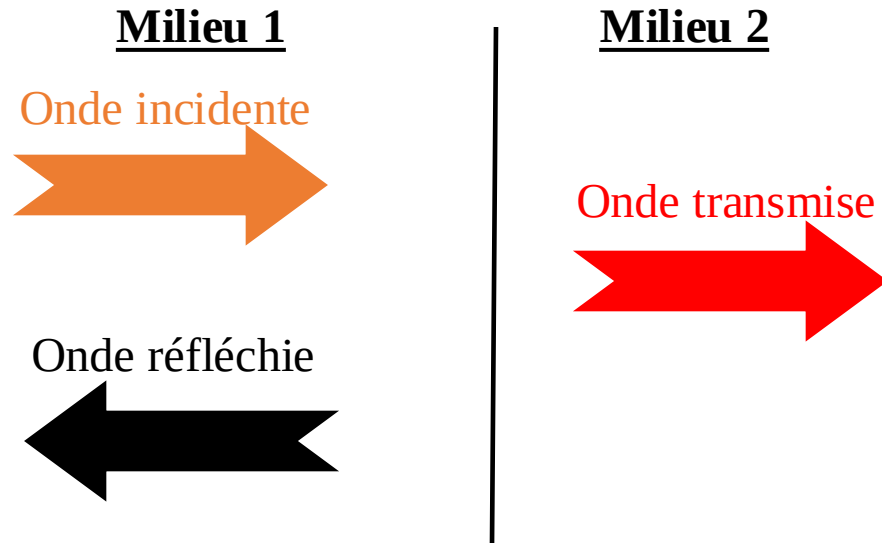
En utilisant le théorème de la divergence, on trouve que la puissance dissipée à travers une surface est donnée par l'opposé du flux du vecteur de Poynting:

$$- \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{\Pi} d^3r = - \int_S \vec{\Pi} dS = \int_V \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{dW_{em}}{d^3r} \right) d^3r = \frac{\partial}{\partial t} \int_V dW_{em} = P_{em}$$

Puissance rayonnée à travers la surface

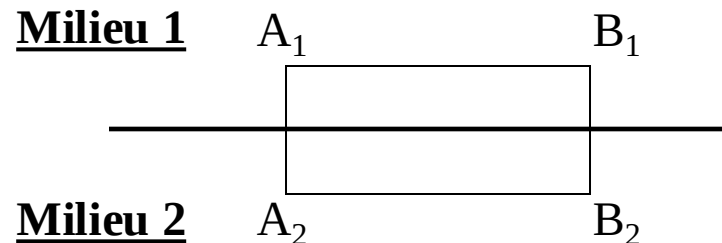
Réflexion et réfraction aux interfaces

III – Relation de continuité aux interfaces:



Pour établir les expressions entre les différentes ondes (incidente, réfléchie et transmise), il faut écrire les relations de continuité à l'interface

Soit une surface S limitée par un contour rectangulaire C petit



On sait que les équations de Maxwell sont vérifiées de partout, notamment la première :


$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Réflexion et réfraction aux interfaces

En intégrant sur la surface S :
$$\iint_S (\vec{\nabla} \wedge \vec{E}) \cdot d\vec{S} = - \iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

En utilisant la formule de Stokes on peut écrire :

$$\oint_{\Gamma} \vec{A} \cdot d\vec{l} = \iint_S (\vec{\nabla} \wedge \vec{A}) \cdot d\vec{S}$$


$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \quad \text{ou encore} \quad \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \frac{\partial}{\partial t} \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

Si $d\vec{S} \rightarrow 0 \Rightarrow \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \rightarrow 0$

donc
$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = \vec{E}_{t1} \cdot \overrightarrow{A_1 B_1} + \vec{E}_{n1} \cdot \overrightarrow{B_1 M} + \vec{E}_{n2} \cdot \overrightarrow{M B_2} + \vec{E}_{t2} \cdot \overrightarrow{B_2 A_2} + \vec{E}_{n2} \cdot \overrightarrow{A_2 M} + \vec{E}_{n1} \cdot \overrightarrow{M A_1} = 0$$

Enfinement 
$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = (\vec{E}_{t1} - \vec{E}_{t2}) \cdot \overrightarrow{A_1 B_1} = 0$$

$$\boxed{\vec{E}_{t1} = \vec{E}_{t2}}$$

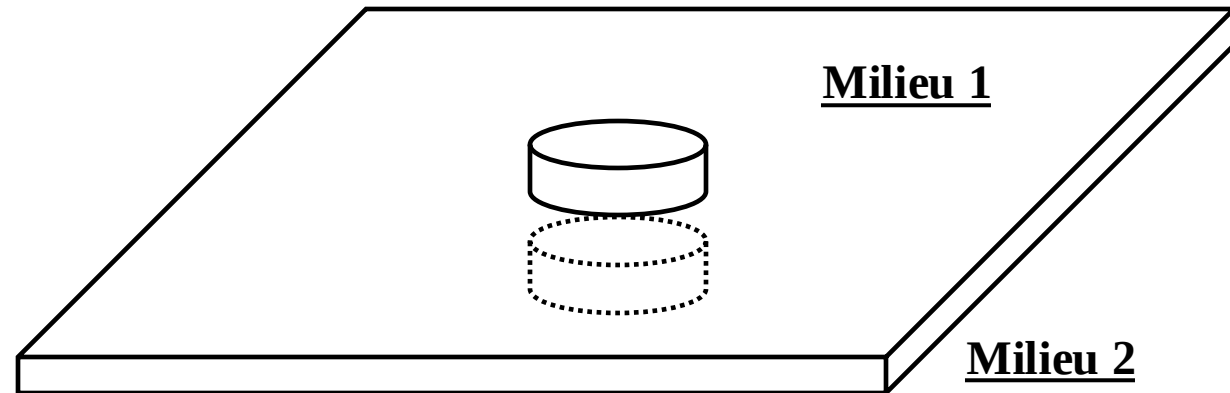
Réflexion et réfraction aux interfaces

Un raisonnement analogue sur la deuxième équation de Maxwell conduit à: $\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

$$\frac{\vec{B}_{t1}}{\mu_1} = \frac{\vec{B}_{t2}}{\mu_2}$$

Si $\mu_1 \approx \mu_2 \Leftrightarrow \vec{B}_{t1} = \vec{B}_{t2}$

On considère maintenant la même surface mais avec des cylindres



On sait que :

$$\vec{\nabla} \bullet \vec{D} = \vec{\nabla} \bullet (\varepsilon \vec{E}) = 0 \quad \varepsilon : \text{permittivité du milieu}$$

La formule d'Ostrogradsky ou de la divergence, nous permet d'écrire : $\iiint_V (\vec{\nabla} \bullet \varepsilon \vec{E}) dV = \iint_S (\varepsilon \vec{E}) \cdot d\vec{S} = 0$

$$\iint_S \vec{A} \cdot d\vec{S} = \iiint_V (\vec{\nabla} \bullet \vec{A}) dV$$

Réflexion et réfraction aux interfaces

Le vecteur $d\vec{S}$ est dirigé suivant la normale à la surface, donc on doit juste tenir compte des composantes normales des champs E .

$$\varepsilon_1 E_{n1} = \varepsilon_2 E_{n2}$$

Le même raisonnement sur $\vec{\nabla} \bullet \vec{B} = 0$ conduit à :

$$B_{n1} = B_{n2}$$

Finalement les 4 équations de continuité sont :

$$\vec{E}_{t1} = \vec{E}_{t2}$$

$$\frac{\vec{B}_{t1}}{\mu_1} = \frac{\vec{B}_{t2}}{\mu_2} \quad \text{généralement on prend} \quad \vec{B}_{t1} = \vec{B}_{t2}$$

$$\varepsilon_1 E_{n1} = \varepsilon_2 E_{n2}$$

$$B_{n1} = B_{n2}$$