

TD3 : Propagation d'ondes mécaniques

Exercice 1 : Etude énergétique d'une corde vibrante

Une corde homogène, de masse m et de longueur L au repos, sans raideur, est tendue avec une force F . On désignera $y(x, t)$ l'élongation transversale d'un point M de la corde d'abscisse x ($0 \leq x \leq L$) à l'instant t .

On notera dE_c , dE_p et dE respectivement les énergies cinétique, potentielle et mécanique totale d'un petit élément de corde de longueur au repos dx .

On désignera $\vec{u}_x$ le vecteur unitaire dans la direction Ox de la corde horizontale au repos.

1. Exprimer en fonction de m , l , F et des dérivées partielles de $y(x, t)$:
 - a) la densité linéique d'énergie cinétique de la corde : $e_c(x, t) = dE_c/dx$,
 - b) la densité linéique d'énergie potentielle de la corde : $e_p(x, t) = dE_p/dx$,
 - c) la densité linéique d'énergie mécanique de la corde : $e(x, t) = dE/dx$,
2. Montrer qu'il existe un vecteur $\vec{\pi} = \pi(x, t) \cdot \vec{u}_x$ tel que

$$\frac{\partial e}{\partial t} + \text{div} \vec{\pi} = 0$$

Exprimer la fonction $\pi(x, t)$ en fonction de F , $\frac{\partial y}{\partial x}$ et $\frac{\partial y}{\partial t}$.

Quelle est la signification physique de cette relation (I) ?

3.a) Exprimer en fonction de A , ω , m , l (et F), la moyenne dans le temps, de l'énergie totale $\langle e \rangle$ et la moyenne dans el temps du vecteur $\vec{\pi}$, soit $\langle \vec{\pi} \rangle$, si la corde est le siège d'une onde plane progressive transversale : $y(x, t) = A \cos(\omega t - kx)$.

3.b) Quelle relation simple lie les grandeurs c , e , π en chaque point ?

Exercice 2 : Harmonique du son émis par une corde de harpe pincée

Une corde tendue de longueur l et de masse m est fixée en ses 2 extrémités O et O' d'abscisses $x = 0$ et $x = l$; ses petits mouvements transversaux $y(x, t)$, avec $0 \leq x \leq l$, sont solutions de l'équation d'onde de d'Alembert

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0, \text{ avec } c^2 = \frac{F \cdot l}{m}$$

A l'instant $t = 0$, la corde est abandonnée sans vitesse après l'avoir déplacée de sa position d'équilibre avec une forme connue : $y(x, t = 0) = f(x)$.

1. Montrer qu'une solution particulière du déplacement transversal de tout point M d'abscisse x de la corde est, à l'instant $t > 0$ de la forme :

$$y_n(x, t) = A_n \sin\left(\frac{\omega_n x}{c}\right) \cdot \cos(\omega_n t)$$

où les pulsations possibles ω_n seront exprimées en fonction de l, c et d'un entier n .

2. En déduire la solution générale $y(x, t)$ de l'équation d'onde (I) et montrer que le coefficient A_n peut être calculé par l'intégrale

$$A_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right) dx$$

3. *Application* : La corde étudiée précédemment est une corde de harpe pincée à l'instant $t = 0$, au point d'abscisse $x = a$ ($0 < a < l$) sur une hauteur $h \ll l$, et lâchée sans vitesse.

a) Exprimer le coefficient A_n de cette corde pincée, en fonction de a, h, l et n .

b) En déduire l'élongation $y(x, t)$ de la corde aux instants ultérieurs $t > 0$.

Que peut-on dire des harmoniques présents dans le son émis par la corde de la harpe ?

c) En quel point faut-il pincer la corde pour éliminer le 7^{ème} harmonique dissonant qui ne fait pas partie de la gamme tempérée de musique ?

4. Dans le cas particulier où la corde est pincée en son milieu, combien obtient-on d'harmoniques si on peut négliger les harmoniques dont l'amplitude est inférieure à 0.5% de l'amplitude du son également émis ?