

TD4 : Equations de Maxwell

1. On considère tout d'abord une onde électromagnétique plane progressive harmonique se propageant dans le vide définie en notation complexe par :

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} \text{ et } \vec{B} = \vec{B}_0 e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}$$

- a) Montrer qu'il s'agit d'une onde plane.
- b) Montrer, en utilisant l'équation de D'Alembert vérifiée par ce champ complexe, qu'on retrouve bien la relation de dispersion $k = \pm\omega/c$ en fonction de la direction de propagation.
- c) Montrer qu'on obtient également la même relation de dispersion en réutilisant les équations de Maxwell écrites sous forme complexe. On pourra utiliser la formule vectorielle suivante :

$$\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})$$

2.) On considère maintenant que la même OPPH arrive dans un milieu conducteur de conductivité γ de sorte qu'elle s'écrit à l'intérieur de ce nouveau milieu en notation complexe :

$$\vec{E}' = \vec{E}'_0 e^{i(\omega t - \vec{k}' \cdot \vec{r})} \text{ et } \vec{B}' = \vec{B}'_0 e^{i(\omega t - \vec{k}' \cdot \vec{r})}$$

On admettra que la pulsation est inchangée à la traversée du milieu, et on ne cherchera pas à déterminer la relation liant $\vec{E}'_0$ et $\vec{B}'_0$ avec $\vec{E}_0$ et $\vec{B}_0$.

- a) Ecrire les équations de Maxwell en notation complexe dans le milieu.
- b) En déduire que l'onde reste transverse dans ce milieu.
- c) En déduire que la relation de dispersion dans le milieu conducteur est donnée par :

$$k'^2 = -i\mu_0\gamma\omega + \frac{\omega^2}{c^2}$$

Exercice 2 : OPPM

1.) On étudie la propagation d'une onde électromagnétique dans le vide.

a) Rappeler l'équation de propagation aux dérivées partielles à laquelle satisfont les champs électrique $\vec{E}(M, t)$ et magnétique $\vec{B}(M, t)$

b) On suppose que le champ électrique est de la forme : $\vec{E} = E_0 \cos(\omega t - kz) \vec{u}_x$

i. À quelle équation doit satisfaire k pour que ce champ soit solution de l'équation rappelée à la première question ?

ii. Quels sont la direction, le sens et la vitesse de propagation de cette onde ?

iii. Quel est l'état de polarisation de cette onde ?

iv. Quelle est la structure de cette onde ?

v. Calculer le champ magnétique $\vec{B}$ associé à $\vec{E}$ ainsi que le vecteur de Poynting de l'onde.

c) La puissance moyenne rayonnée par cette onde à travers une surface $S = 4\text{mm}^2$ orthogonale à sa direction de propagation est $\mathcal{P} = 10\text{W}$. Calculer les amplitudes E_0 et B_0 des champs électrique et magnétique.

2.) On étudie maintenant une seconde onde électromagnétique dont le champ électrique est :

$$\vec{E} = E_x \vec{u}_x + E_y \vec{u}_y \text{ avec } E_x = E_0 e^{i \left[\frac{k}{3}(2x + 2y + z) - \omega t \right]}$$

L'onde se propage dans le vide et sa longueur d'onde est $\lambda = 6.10^{-7} \text{ m}$.

a) Calculer la fréquence de l'onde.

b) Dans quel domaine du spectre électromagnétique se situe cette onde ?

c) Calculer la valeur numérique de la constante k .

d) Établir l'équation cartésienne d'un plan d'onde.

e) Exprimer E_y en fonction de E_x .

f) Calculer le champ magnétique $\vec{B}$ de cette onde.

g) Calculer la densité moyenne d'énergie électromagnétique associée à cette onde.

h) Calculer le vecteur de Poynting de cette onde ainsi que sa valeur temporelle. Commenter.